数　学　III

1　指導計画（極限　　配当時間　１８時間）
- (1) 数列の極限（２時間）
- (2) 無限等比数列（３時間）
- (3) 無限等比級数（３時間　　本時はその１時間目）
- (4) 関数の極限（３時間）
- (5) 極限の計算（２時間）
- (6) 三角関数と極限（２時間）
- (7) 連続関数（３時間）

2　指導目標
- (1) 無限級数の様々な表現ができる。（関心・意欲・態度）
- (2) 無限級数の収束・発散について理解できる。（数学的な考え方）
- (3) 無限等比級数の収束・発散の条件が理解できる。（知識・理解）
- (4) 無限等比級数の結果が求められる。（表現・処理）

3　対象

理科系の大学受験を目指す生徒

4　指導案

ね　ら　い	学習活動（○:教師　●:生徒）	指導上の留意点及び評価	注
無限級数の定義に従い記号が使いこなせる。 (10分)	○数列 $\{a_n\}$ の各項に対して $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$　……① を無限級数と定義する。 ●Σ, lim, S_n 等の記号を使って①をコンパクトに表現する。	**関心・意欲・態度** ①の別の表現を意欲的に考える。 ◎記号の意味をよく考えさせる。 **表現･処理** 記号が正確に使える。	(1)
無限級数の収束・発散と数列の極限との関係が理解できる。 (25分)	●$n \geqq 2$ のとき, $a_n=S_n-S_{n-1}$ を使い両辺の極限を考える。 ○無限級数が収束するとき, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ となることを導く。 ●上記の対偶を考える。	**数学的な考え方** 無限級数が収束するなら $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$ であることに気がつく。 ◎ $\lim_{n\to\infty} S_{n-2}$, $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ 等の値もSとなることに触れる。 **関心・意欲・態度** 対偶をつくろうとする。	(2) (3)

ね　ら　い	学習活動（○:教師 ●:生徒）	指導上の留意点及び評価	注
	○無限級数の収束と発散について以下のようにまとめる。 1　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 2　数列 $\{a_n\}$ が 0に収束しなければ　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する	**知識･理解** 無限級数の収束と数列の極限との関係が理解できる。 ◎２は１の対偶であり,１が成り立てば２も成り立つことを確認する。	(4)
	●上記１の逆が成り立つか考える。 ○生徒からの意見・考えを正しく評価し,反例の例として $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ を示す。	**関心・意欲・態度** １の逆をつくり、成り立つかどうか考え、その説明を試みる。 ◎直観的にわかりやすい反例がないので丁寧な説明をする。	(5)
	●上記２を使って, (1)　$1-3+5-7+\cdots\cdots$ (2)　$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}+\cdots\cdots$ が発散することを説明する。	**表現･処理** 上記２が正しく使える。 ◎一般項を明確にし,その極限を考えさせる。	(6)
無限等比級数の収束・発散の条件が理解でき収束する場合の計算ができる。 (15分)	○初項a,公比rの無限等比数列からできる無限級数 $a+ar+ar^2+\cdots\ ar^{n-1}+\cdots$　……② を無限等比級数と定義する。	◎②は $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ と表現できることを確認する。	
	●上記２を使って②の発散条件を考える。	**数学的な考え方** $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$　から　$\lvert r\rvert \geqq 1$ が導ける。	(7)
	○等比数列の和の公式を確認し, $\lvert r\rvert<1$ のとき,②の結果が $\frac{a}{1-r}$ であることを示す。	**知識･理解** 左記の結果が理解できる。 ◎ $\lvert r\rvert<1$ のとき,$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ を確認する。	(8)
	●上記の結果を使って,次の問題を計算する。 (1)　$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots$ (2)　$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	**表現･処理** 左記の問題が計算できる。 ◎ aとrの値が何であるかをはっきりさせる。	

5　指導のポイントと考察

数学Ⅲを学習する生徒は，理系コースの比較的数学が得意な生徒が主であり，やはり大学受験を意識した内容も取り入れて行く必要がある。身近な例を素材にしていくことも重要であるが，興味関心が十分ある生徒に対しては，数学の体系にそって大学で学ぶ数学の基礎を正確に教えていくべきと考える。

学習指導要領には，数学Ⅲの目標として「関数と極限，微分法及び積分法について理解を深め，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばす」とある。そして，極限の概念は解析学全体の根底をなし，また数学Ⅲにおいても，微分法・積分法の基礎となるもので極めて重要である。

極限の指導目標としては，

(1) 無限数列の極限の考え方を示し，特に無限等比数列の収束・発散をまとめる。また，いろいろな一般項をもつ無限数列について，それぞれの特色に応じた計算法による極限の求め方に習熟させる。

(2) 部分和の極限としての，無限級数の和の考え方を明確にし，無限等比級数の収束・発散及び無限等比級数の循環小数や図形への応用に対する理解を深める。

(3) 数列の極限を基礎として，関数の極限の考え方を理解させる。特に右の極限・左の極限の考え方を取り入れることによって，極限の意味を明らかにする。

(4) 極限の計算を無理関数や三角関数の領域まで広げて取り扱い，微分方での裏付けをする。

(5) 関数の点における連続，区間における連続を定義し，いろいろな関数の連続性に関する性質をまとめ，一般の連続関数のもつ特性に触れる。

本時は無限級数から無限等比級数を扱っていく場面であるが，指導のポイントとして次の点を考えたい。

(1) 無限級数の収束・発散の意味を十分理解させ，その考えを正しく用いられるようにする。

(2) 特に無限等比級数については，初項と公比の場合分けによって，その収束・発散をまとめ，循環小数が無限等比級数の考えによって分数で表されることや，図形に関連した問題への応用についての理解を深めさせる。

注(1)について

①の表現として $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が一番簡単であるが，部分和 S_n を考えてその極限を計算していくことが中心になることが多いので，$\lim_{n \to \infty} S_n$ つまり $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ もきちっと理解させたい。

また，計算や思考の過程では $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ という表現のほうがわかりやすいことも多いので，場合に応じて使い分けるよう指導したい。

注(2)について

等式の両辺の極限をとることのイメージが理解できるか心配される。等式の両辺を微分したり積分したりと様々な操作をすることが多いので，あまり深く考えずに通りすぎてしまうかもしれない。右辺は S_n，S_{n-1} の極限がともに存在するので項を分けることができ，極限値がともにSであることから

$$\lim_{n \to \infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

となっていくことを確認していきたい。

注(3)について

１つの命題に対して，逆・裏・対偶が考えられ，それらが正しくつくることができるか，数学Ａでの既習事項ではあるが，触れておきたい。

注(4)について

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要条件であり，十分条件でないことを強く確認したい。

注(5)について

説明のしやすい反例を１つあげればよいことを確認したい。ここで使った反例は極限計算にも手ごろであるが $a_n = \dfrac{1}{n}$ が反例になることにも触れたい。この証明は多少手間取るが，生徒のレベルや進度状況に応じて解説をし，素朴な疑問を解決しておきたい。

注(6)について

(1)は

$1+(-3+5)+(-7+9)+\cdots\cdots$

$(1-3)+(5-7)+(9-11)+\cdots\cdots$

の両方に見なすことで和の極限値が変わってしまう。このことからも(1)の結果が発散することを説明できる。しかし，無限級数は与えられた順に和を計算していき，その極限を調べて決めるのであって勝手に加える順序を変えてはいけない，つまり初項から第n項までの和S_nを項とする数列$\{S_n\}$を考え，この数列の収束・発散を考えなければいけないことも言っておきたい。

注(7)について

混乱が生じやすいところなので，既習事項である

$a \neq 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} 0 & (-1<r<1) \\ a & (r=1) \\ \text{発 散} & (r \leqq -1,\ 1<r) \end{cases}$$

を何度も確認して，無限等比級数の収束・発散の条件と比較しておきたい。

注(8)について

$a \neq 0$ のとき，無限等比数列$\{ar^{n-1}\}$の収束条件は $-1<r\leqq 1$ であることと比較したい。また収束する場合の無限等比級数の計算はaとrを用いて非常に簡単な結果となる。 本時の後に様々な練習問題が出てくるが

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\cdots$$

の結果は１，そして部分和は１を超えないことも明らかになり，疑問に感じていた部分が解消される瞬間となる。

6　評価方法

次のような評価方法が考えられるが，これらをすべて使うのではなく，生徒の実態に合わせて生徒の意欲が喚起される形での組み合わせが必要となる。

(1) 観察による評価

授業における態度（話を集中して聞く・積極的発言や質問をする等）教師の主観により点数化していく。主観が中心となるだけに公平性が保たれるかが問題となる。

ここでは，無限級数の表現や収束・発散と数列の極限との関係を積極的に考えようとしているかを評価（記録）していきたい。また，間違った思考をしても，その間違えに気づいたり，その原因を考えようとする姿勢，さらに授業を盛り上げる言動等も当然評価すべきである。

(2) ノートや課題提出による評価

授業中のノートのとり方や課題等の取り組み状況をノートを提出させて評価していく。ノートの使い方や記述の仕方は学習内容の理解とあまり相関が内容に思われるが，きれいにノートを整理しようとする行為も学習に対する意欲の表れであると評価していきたい。

無限級数において特に注意すべき点はないが，記号が正しく使われているか，計算が正しく行われているか，式の羅列でなく理由付け等の文章が適切に書かれているか等を評価すればよいと思われる。

(3) 自己評価

毎時間自己評価をさせることが理想であるが，それを実行していくのは現実には難しい。具体的には１週間，１ケ月，１学期等の適当な期間を単位としてアンケート形式や小テストを試みることが考えられる。これは教師の授業の評価においても有用な手段である。

ここで取り上げた無限級数の領域では，指導案の評価項目に従って次のようなアンケート項目が考えられる。

① 級数のいろいろな表現の仕方を意欲的に考えましたか。
② Σ,lim等の記号が正確に使いこなせますか。
③ 無限級数が収束するなら数列の極限が０になることが理解できましたか。
④ 命題の対偶をつくることができますか。
⑤ 数列が０に収束しても級数（その和）が収束しないことがあることの反例をいえますか。
⑥ 無限等比級数の収束・発散の条件が理解できましたか。
⑦ 無限等比級数が収束するときの結果を計算できますか。
⑧ 全体を通して，授業に意欲的に取り組めましたか。
⑨ 全体を通して，理解度はどうでしたか。
⑩ 全体を通して，授業は楽しかったですか。
⑪ 理解できないところ，疑問に感じるところがありましたら，何でも書いて下さい。

これらの項目を一般的には５段階評価させると良いと思われる。評価の低い項目については具体的にどこでつまずいているのか，何が理解できないのかを率直に書かせることができれば，次への指導の参考になっていくはずである。

また，授業時間中にアンケートを実施することが時間的きつい状況も考えられるので，そうした場合は，自宅での回答でもよいのではないか。さらに，項目が細かすぎると，かえって回答が雑になることも予想されるので，教師側が必要とする最小限の項目に押さえるといった配慮をしたい。

このアンケートを教師がどのように評価するかは難しいが，理解度と同時に個々の記述から授業への意欲が感じられるものについては適当な評価を与えていくべきだと考える。

(4) スモールテストによる評価

表現・処理，知識・理解の観点を評価する一番自然な評価法である。当然，教科書レベルの問題を中心とし，基礎・基本を踏まえたものとすべきである。クラスの全員がクリアできることが理想であるが，場合によっては，教科書やノートを参考に見てもよいという条件や周囲の生徒と相談してよいという条件で実施してもよいのではないか。

実施するスパンをどう設定するかが難しく感じられるが，なるべく短いスパンでの実施が効果的と思われる。毎時間の頭で行うことを定着させてしまうのも一つの方法である。しかし，授業時数が十分確保できない現実では家庭での課題とせざるを得ないかもしれない。

(5) 定期試験・模擬試験による評価

知識・理解の定着度，また学習内容を基にその応用力をみるためのものであり，これからも学習評価の中心であることに変わりはないであろう。その中で観点別評価を生かす問題作成をどうするのか。

簡単な問題や何度も繰り返し演習を行ってきた問題では，知識・理解及び表現・処理の観点からの評価しかしにくく，関心・意欲・態度及び数学的考え方を評価するためには，(完全な解答を求めるには)難問と思われる出題をしてしまう傾向になるであろう。その結果，学力の低い生徒にとっては手のつけられない問題となってしまう可能性もでてくる。

その中で，いかに生徒に取り組みやすいようなヒントや条件を与えるかの工夫が必要である。また，時間設定も難しく，一般の定期試験のような制限時間５０分というような枠も柔軟に考えたいものである。以下に示すのは，目新しい問題ではないが，観点別の評価に適するのではないかと思われる問題である。

① 知識・理解を評価する問題

ア $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^n$ が収束するするための x の値の範囲を求めよ。

イ 和が９で第２項が２の無限等比級数の初項 a と公比 r を求めよ。

② 数学的な考え方を評価する問題

ア 次の無限級数の和を求めよ。

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots$$

イ 「単調に増加する数列で，各項が一定数を越えないときこの数列は収束する。」このことを用いて $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ が収束することを示せ。

③ 表現・処理を評価する問題

ア $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^{n-1}}-\frac{3}{2^{n-1}}\right)$ を計算せよ。

イ $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots$ が発散することを示せ。

④ 関心・意欲・態度を評価する問題

ア $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，$0 < \sum_{n=1}^{\infty} sin^n\theta < 1$ となるような θ の値の範囲を求めよ。

イ 次のような話は正しいのでしょうか。あなたの考えを説明して下さい。

「A，B２人は共に同じ方向に進むものとする。地点 X_0 にいるAが地点 X_1 にいるBをBより速い速度で追いかける。Aが地点 X_1 に到達する時間にBはその先の地点 X_2 に進んでいる。同様にAが地点 X_2 に到達する時間にBはさらにその先の地点 X_3 に進んでいる。この考えを繰り返していくといつまでたってもAはBに追いつけないことになる。」

（この問題については，X_0X_1 間の距離やAの速度，Bの速度を具体的な数値や文字で与え，生徒の習熟度に応じて出題するのがよいと思われる。）

上記の問題を冷静に眺めると，例えば知識・理解を評価する問題を解くにしても，表現・処理が正確にできなければ正解にたどりつかない。つまり，どの問題を解くにしても４つの観点のいずれもが必要になり，それぞれが評価の対象とできるようにも考えられる。

しかし，生徒の解答の記述の中から意識的にある観点を主にした評価を与えることは可能である。すなわち採点の際に，関心・意欲・態度を評価しようとして出した問題は，計算ミスや公式を正しく使えないことが原因で正解とはかけ離れた解答になっていても，一生懸命計算した跡や何とか答えを出そうとする姿勢が伺える等の努力を高く評価していけばよいのではないかと思われる。

以上(1)～(5)まで考えられる評価方法を示したが，それらをどのようなバランスで扱うかが最後の問題として考えられる。現状では(1)～(4)を２割から３割とし,残りは(5)つまり定期試験で評価することが多いと思われる。しかし，(1)～(4)の比重を増やしていくことも決して非難されることではない。また,(5)を１０割とし，それを基礎に(1)～(4)を加点または減点する方法も考えられる。

一般に意欲・関心が高いことと成績が良いことはかなりの正の相関がある。またいろいろな評価方法を使ったとしてもそれぞれ互いに正の相関があることは容易に推測できる。しかし真面目にそして，意欲的に取り組んでいるが理解度が低くテストの点が思うように取れないといった生徒をどう評価してあげるのかが問われているのであり，生徒の内面を少しでも正確に評価していくことがポイントとである。公平性を保ちながら主観的評価と客観的評価のバランスをとることも忘れてはいけない。