

数学C

1 指導計画（媒介変数表示と極座標 配当時間 12時間）

- (1) 曲線の媒介変数表示(4時間 本時はその3時間目)
- (2) 極座標と極方程式(5時間)
- (3) コンピュータといろいろな曲線(2時間)
- (4) 問題演習(1時間)

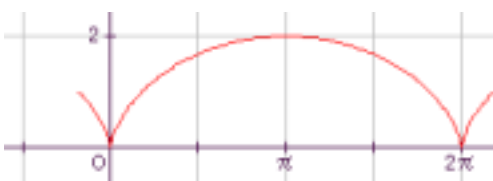
2 本時の目標

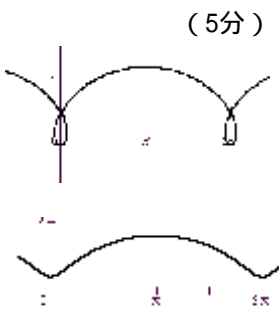

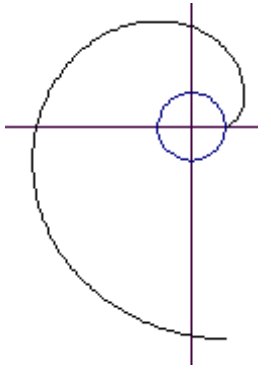
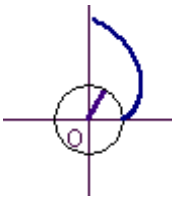
- (1) 日常の数学的事象に関心を持ち、結果を予想する。(関心・意欲・態度)
- (2) 座標で成り立つ関係を考え、位置を媒介変数表示として捉える。(数学的な考え方)
- (3) いろいろな曲線の表す媒介変数表示の成り立ちを理解する。(知識・理解) (表現・処理)

3 対象

理系基礎クラス・応用クラス

4 基礎クラス指導案

ねらい	学習の活動（ :教師 :生徒）	指導上の留意点及び評価	注
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;">条件を満たす点の軌跡を予想する</div> <p style="text-align: center;">(10分)</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p style="text-align: center;">課題 1</p> <p>自転車のタイヤの1点にチョークで印を付けて滑ることなく走らせるとき、この印の軌跡はどんな曲線を描くか考えてみよう。</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p style="text-align: center;">課題 2</p> <p>電車の車輪を考えて線路を横軸にとるとき、次の点はどんな曲線を描くか考えてみよう。</p> <p>(1)車輪の外側の1点の軌跡 (2)車輪の内側の1点の軌跡</p> </div> <p>各人が予想図を記入する。 サイクロイド・トロコイドとよばれる曲線になることを確認し、特徴を説明する。</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p style="text-align: center;">関心・意欲・態度</p> <p>日常の事象に関心を持ち予想しようとしているか。</p> </div> <p>予想を立てられない生徒については10円玉などを使って回転の様子を観察させる。</p> <p>生徒に発表させる</p> <p>板書させる。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p style="text-align: center;">知識・理解</p> <p>現実にある形を理解する</p> </div>	(1)
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;">サイクロイドの曲線の式を求める</div> <p style="text-align: center;">(10分)</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p style="text-align: center;">課題 1 の式を求めよう。</p> </div> 	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p style="text-align: center;">数学的な考え方</p> <p>必要な変数と位置関係を式で表すことができるか</p> </div> <p>弧度法の定義を確認する。</p>	(2)

ねらい	学習の活動(:教師 :生徒)	指導上の留意点及び評価	注
	<p>$P(x, y)$がどう表されるか考える。 $x = OQ - PR = a(1 - \sin \theta)$ $y = CQ - CR = a(1 - \cos \theta)$ と表され θ を媒介変数とする方程式になることを確認する。</p>	<p>知識・理解 xとyの式の求め方がそれぞれ理解できる。</p>	
<p>トロコイドの曲線の式を求める</p> <p>(5分)</p> 	<p>課題2の式を求めよう。</p>  <p>媒介変数表示のどこの部分を変えた式になるか考える。 $x = a - c \cdot \sin \theta$ $y = a - c \cdot \cos \theta$ と表されることを確認する。</p>	<p>数学的な考え方 式の中の文字変化を考えられるか。</p>	(3)
<p>インボリュート曲線(伸開線)の式を求める</p> <p>(20分)</p> 	<p>課題3 半径1の円に巻き付いた糸が離れていくとき、糸の端点が描く軌跡を図示せよ。また、端点の媒介変数表示を求めよう。</p> <p>各人が予想図を記入する。 曲線を確認する。</p>  <p>各人が曲線の媒介変数表示を考える。 $x = \cos \theta + \theta \cdot \sin \theta$ $y = \sin \theta - \theta \cdot \cos \theta$ と表されることを確認する。</p>	<p>紐を巻き付けた厚紙の円を用意しておき黒板で生徒に作業をさせる。</p> <p>表現・処理 適切な図が書ける。</p> <p>図から発見できることを発表させる。</p> <p>数学的な考え方 図から必要な変数と位置関係を発見できるか。</p>	(4)
<p>まとめ</p> <p>(5分)</p>	<p>サイクロイドは媒介変数表示が有効な例で、この場合媒介変数は消去できない。 他に、円の内側や外側に円を回転して得られるアステロイド、カディオイドとよばれる曲線がある。</p>		

注(1)について

サイクロイド曲線については、古くから知られていて主に建築技術に取り入れられ、橋の形などに

活用されている説明をして、いくつかの写真を生徒に見せる。

トロコイド曲線については、 $c < a$ のときの曲線は、海の波の形になっていることなど、実存する曲線であることを生徒に伝える。

注(2)について

$OQ = PO = a$ になることに注意して、図の三角形を利用して媒介変数表示を導く。更に媒介変数を消去して簡単な x, y の方程式を得ることはできないことに注意する。逆にコンピュータで曲線を描くときは、媒介変数表示のままのほうが描きやすいことも触れておく。

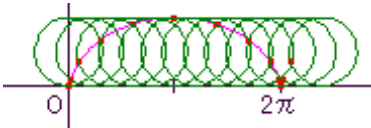
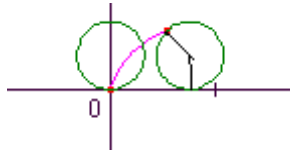
注(3)について

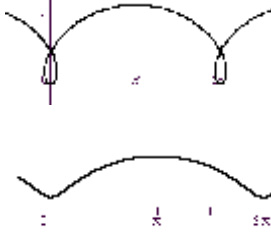
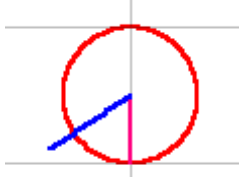
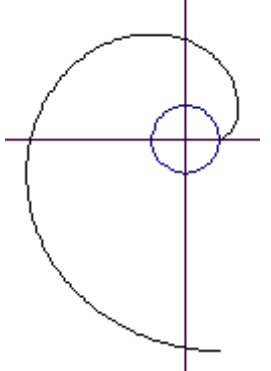
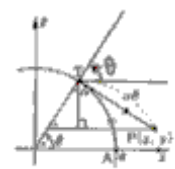
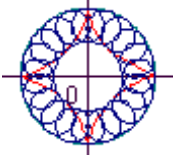
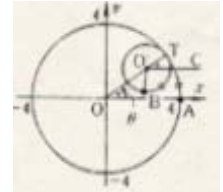
図より円周上ではなく、外部、内部の点の軌跡を考えているので、式の上ではどこが変化するかを考えさせる様に指導する。

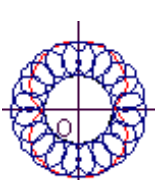
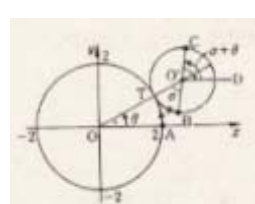
注(4)について

巻き付いた糸が離れていくときの様子を観察させる中で、常に円と糸の接点は直角になっていることを気づかせる。さらに、補助線を引いて相似になる三角形から等しい角を発見し、媒介変数表示に表せるように指導する。

4 応用クラス指導案

ねらい	学習の活動(:教師 :生徒)	指導上の留意点及び評価	注
<p data-bbox="183 1025 427 1182">サイクロイドの曲線の軌跡を予想し式を求める</p> <p data-bbox="336 1200 432 1234">(10分)</p>	<p data-bbox="464 1014 916 1048">円から生まれるいろいろな曲線 [1]</p> <p data-bbox="517 1055 651 1084">課題 1</p> <p data-bbox="491 1090 925 1234">半径 a の円 C が直線上を滑ることなく回転していくとき、円周上の定点 P が描く軌跡の曲線を予想して、方程式を求めよう。</p> <p data-bbox="491 1274 798 1346">各人が予想図を記入する。 曲線を確認する。</p>  <p data-bbox="491 1615 932 1648">$P(x, y)$ がどう表されるか考える。</p> <p data-bbox="517 1686 807 1758">$x = a(- \sin)$ $y = a(1 - \cos)$</p> <p data-bbox="491 1765 948 1865">と表され を媒介変数とするサイクロイド曲線になることを説明する。</p>	<p data-bbox="995 1055 1337 1182">関心・意欲・態度 事象に関心を持ち予想しようとしているか。</p> <p data-bbox="995 1200 1214 1234">生徒に発表させる</p> <p data-bbox="995 1240 1337 1323">知識・理解 現実にある形を理解する</p> <p data-bbox="995 1350 1337 1476">数学的な考え方 必要な変数と位置関係を式で表すことができるか</p>  <p data-bbox="995 1727 1337 1852">知識・理解 x と y の式の求め方がそれぞれ理解できる。</p>	<p data-bbox="1378 1312 1433 1346">(1)</p> <p data-bbox="1378 1574 1433 1608">(2)</p>

ねらい	学習の活動（ : 教師 : 生徒）	指導上の留意点及び評価	注
	<p>課題 2</p> <p>上で述べたように円Cが転がる時、CP上でCからの距離がb ($0 < b < a$)である定点Bが描く曲線の方程式を求めよう。</p> <p>媒介変数表示のどこの部分を変えた式になるか考える。</p> $x = a \cdot \theta - b \cdot \sin \theta$ $y = a \cdot \theta - b \cdot \cos \theta$ <p>と表されるトロコイド曲線になることを説明する。</p>	<p>数学的な考え方 式の中の文字変化を考えられるか。</p>  <p>知識・理解 現実にある形を理解する。</p>	(3)
<p>インボリュート曲線(伸開線)の軌跡を求める</p> <p>(10分)</p> 	<p>円から生まれるいろいろな曲線 [2]</p> <p>課題 3</p> <p>半径aの円に巻き付いた糸が離れていくとき、糸の端点が描く軌跡を図示せよ。また、端点の媒介変数表示を求めよう。</p> <p>各人が予想図を記入する。 曲線を確認する。 $P(x, y)$がどう表されるか考える。 $\vec{OP} = \vec{OT} + \vec{TP}$ $= (a \cos \theta, a \sin \theta) + (a \cos(\theta - \frac{\pi}{2}), a \sin(\theta - \frac{\pi}{2}))$ $= (a \cos \theta, a \sin \theta) + (a \sin \theta, -a \cos \theta)$ $x = a(\cos \theta + \sin \theta)$ $y = a(\sin \theta - \cos \theta)$ と表されるインボリュート(伸開線)になることを説明する。</p>	<p>表現・処理 適切な図が書ける。</p> <p>数学的な考え方 必要な変数と位置関係を発見できるか。</p> 	(4)
<p>内サイクロイド(アスロイド)曲線の軌跡を求める</p> <p>(15分)</p> 	<p>円から生まれるいろいろな曲線 [3]</p> <p>課題 4</p> <p>原点を中心とする半径4の円Oのしなごら滑ることなく転がる時、円C上の定点Bの軌跡を求めよう。</p> <p>各人が予想図を記入する。 曲線を確認する。 $B(x, y)$がどう表されるか考える。 $AT = BT$ より $BO = 4$</p>	<p>数学的な考え方 必要な変数と位置関係を式で表すことができるか</p> 	(5)

ねらい	学習の活動（ :教師 :生徒）	指導上の留意点及び評価	注
	$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B} \\ &= (3\cos\theta, 3\sin\theta) \\ &\quad + (1\cdot\cos(-3\theta), 1\cdot\sin(-3\theta)) \\ &= (3\cos\theta + \cos3\theta, 3\sin\theta - \sin3\theta) \\ &= (4\cos^3\theta, 4\sin^3\theta) \end{aligned}$	<p>知識・理解</p> <p>xとyの式の求め方がそれぞれ理解できる。</p>	
<p>外サイクロイド（ネフロイド）曲線の軌跡を求める</p> <p>(15分)</p> 	<p>円から生まれるいろいろな曲線 [4]</p> <p>課題 4</p> <p>原点を中心とする半径2の円Oの外側を半径1の円Cが、円Oに外接しながら滑ることなく転がるとき、円C上の定点Bの軌跡を求めよう。</p> <p>各人が予想図を記入する。 曲線を確認する。 B(x, y)がどう表されるか考える。</p> $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'C}$ $= (3\cos\theta, 3\sin\theta) - (1\cdot\cos3\theta, 1\cdot\sin3\theta)$ $= (3\cos\theta - \cos3\theta, 3\sin\theta - \sin3\theta)$	<p>数学的な考え方</p> <p>必要な変数と位置関係を式で表すことができるか</p>  <p>知識・理解</p> <p>xとyの式の求め方がそれぞれ理解できる。</p>	(6)
<p>まとめ</p>	<p>いろいろな曲線は媒介変数表示が有効であることを確かめる。</p>		

注(1)について

サイクロイド曲線については、古くから知られていて主に建築技術に取り入れられ、橋の形などに活用されている説明をし、いくつかの写真を生徒に見せる。さらに、多くの学者が研究してきたことを紹介する。

ホイヘンス：この曲線を逆さにおくと、どこから質点を転がしても最下点まで降下するに要する時間は変わらない。等時性

ヤブ・バルヌイ：物体が与えられた点から他の点まで重力の作用で動くとき、この曲線に沿って動けば最も速く到達できる。等速降下線

ホイヘンス：サイクロイドを用いて正確な等時性を持つ振り子が作れることを発見。

デザルグ：歯車の歯形に利用できることを発見。

注(2)について

$OA = PA = a$ になることに注意し、三角関数の理解を確認して、図から媒介変数表示を導く。更に媒介変数を消去して、簡単なx, yの方程式を得ることはできないことに注意する。

注(3)について

トロコイド曲線については、 $c < a$ のときの曲線は、海の波の形になっていることなど、実存する曲線であることを生徒に伝える。

注(4)について

$\overline{TP} = \overline{AT} = a$ になることに注意し、 T を中心動径 TP の円を考えることにより \overline{TP} の成分表示を求められるように指導する。

注(5)について

角の向きをしっかりと捉えられるように注意させる。アステロイドについては、媒介変数 t を消去して $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ となる。これは、どこで接線を引いてもその両座標軸の間に挟まれている部分の長さは一定 a である。従って、アステロイドは一定の長さ a の線分がその両端を両座標軸上に置いて動くときの包絡線でもあることも指導する。

注(6)について

$\overline{OB} = -\overline{OC}$ となる点 C を考えると計算が簡単になることを気づかせる。また、転がる円と中の円の半径が等しいときは、カ・ディオイド(心臓形)になることも紹介しておく。

5 学習のねらい

数学Cの目標に「応用数理の観点から、コンピュータを活用して、いろいろな曲線について理解させ、知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数理的に考察し処理する能力を伸ばす。」「コンピュータを活用するなどによっていろいろな曲線を観察、考察し、簡単な図形については実際に描けるようにする。」と示されている。

このことから分かるように、この項目の意図するところは、コンピュータグラフィックスの活用により、座標平面の概念の理解を深め、さらに、媒介変数表示による曲線の表示方法を理解することである。コンピュータを活用すると言った場合に、生徒にBASICなどの言語でプログラムを書かせるべきか、グラフを描くための既成のソフトウェアを利用すべきかと意見が分かれる所である。

ここでは、いろいろな曲線の学習を通じて、生徒が作業をすることにより、簡単な図形について曲線を予想、創造して、媒介変数表示を理解することを主目的に置いた授業展開を試みた。また、基礎クラス・応用クラスで、思考の過程を変えて試みた。

6 評価方法の工夫

(1) 「関心・意欲・態度」の評価(自己評価)

自己評価は生徒の捉え方が様々で、個人差が大きく、客観的に評価することは難しいといえる。しかし、生徒による自己評価は、生徒が自分自身を見つめることによって、数学について関心を持ってくれたり、態度の面で数学を自分でやってみようとか、指導を通して生徒の「関心・意欲・態度」のプラスの面が期待できる。さらに、授業の評価を通して、教師自身の授業を自ら評価する側面も持っており教師の授業改善にも役立つものと思われる。

生徒に、～について関心を持ってもらうとか、～についての態度を育成しようと思って教師は日々授業に臨んでいることであろう。基本的には長い期間を通して態度は養われると考えるが、1時間の授業では「関心・意欲・態度」を完全に客観的に評価することは難しいと考え、5・6時間ごとに下記のような形式の「質問用紙」記入させ、教師の評価(A・B・C)を記入した。この期間、机間巡視をしながら生徒全員の様子を観察するよう心がけた。その際、評価することにとらわれすぎず、生徒と対話したり、目標に到達できていない生徒の指導をしたりして、必要に応じて授業態度なども記録しておいた。

しかし、一人の教師で指導もしながら、しかも全体に目を配り評価していくというのは、生徒一人ひとりにとって平等かつ客観的な評価になっているだろうか、という課題点も残った。

自己評価表(月 日)	授業内容:	3年 組 番 氏名
内 容	評 価	
1 興味を持って取り組みましたか。	A ・ B ・ C	
2 意欲的に思考し、正しく理解できましたか。	A ・ B ・ C	
3 自分なりに図を書こうとしましたか。	A ・ B ・ C	
4 自分で公式や法則を見付けようとしてましたか。	A ・ B ・ C	
5 積極的に授業に取り組みましたか。	A ・ B ・ C	
感 想		

(2) 「数学的思考方」「知識・理解」「表現・処理」の評価(プリント学習・スモ-ルテスト)

プリント学習 : 授業の要点を書いた簡単なプリントを用意して(予め必要な図を載せておく)、生徒に板書事項を埋めさせることにより、生徒の理解・数学的思考方の過程を見ることにした。机間巡視の際成績上位の生徒には応用課題を与え、成績下位の生徒にはその授業における最低到達目標まで学習できるように指導し、提出させた。また評価するだけでなく、生徒一人ひとりの学習の把握にもなり、遅れがちな生徒については再提出させるなど、今までとは異なる指導ができた。

スモ-ルテスト : 区切れの良いところで、授業の始めもしくは終わりに10分程度の確認テストを行った。得点をそのまま入力しておき、その平均点を評価としたが、得点不足の生徒には昼休みや放課後などに追試を行い、理解できるまで指導できた。

(3) 「総合の評価」

「定期試験」を80点分、「確認テスト」を10点分、「その他の観点別評価」を10点分に換算して算出した。定期テストを作成する際に最も留意すべきことは、問題の難易、平均点の目安ばかりでなく、指導目標に対応した問題・設問を出題することであると考える。その上で大切なことは、どのような学力を調べようとするのかを明確にして問題を作成することである。さらに、日常的に行ってきた小テストの総括となるような問題作成を心がけることも求められる。

評価には、客観性、統一性が必要であり、生徒一人ひとりに対して平等でなければならない。日頃の活動状況を適切に評価するのは非常に難しいことではあるが、日々努力して真剣に取り組んで行くべき大切な課題であることを改めて認識した。単に「関心・意欲・態度」を評価するのではなく、生徒の意欲を高める意味でも、教材や学習の展開をどのように工夫するかを研究して行く必要があると考える。