

「方針を立てて証明しよう」

～与えられた条件を整理し、着目すべき性質を見いだす～

証明の学習では、どのように考えればよいかかわらず証明を書けない生徒が多くみられます。このような生徒には、証明の方針を立てる活動を通して、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質を見いだしたりできるように促すことが大切です。

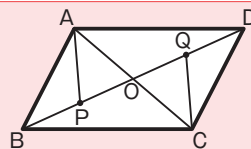
そこで本アイデア例では、「Ⅰ 結論を示すためには何がわかればよいか」、「Ⅱ 仮定からいえることは何か」、「Ⅲ ⅠとⅡを結び付けるには、あと何がわかればよいか」を考え、証明の方針を立て、その方針に基づいて証明できるようにする指導事例を紹介しています。



授業アイデア例

問題

右の図のように、平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし、線分 OB, OD 上に、 $BP = DQ$ となる点 P, Q をそれぞれとります。このとき、 $AP = CQ$ となることを証明しなさい。



< 1 時間目 >

方針を立て、証明しよう。

1. 証明の方針を立てる。

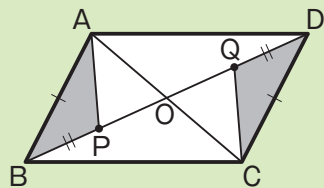
① 結論を示すためには何がわかればよいか。



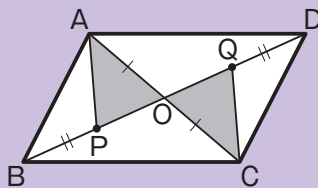
AP = CQ であることを示すためには、どの 2 つの三角形に着目すればよいですか。



△ABP と △CDQ の合同を示せばよいです。



△APO と △CQO の合同を示せばよいです。



二人とも、AP と CQ が対応する辺になっている 2 つの三角形を見つけましたね。

まず、△ABP と △CDQ に着目してみましょう。

ポイント!

Ⅱ 仮定からいえることは何か。



△ABP と △CDQ の辺や角について、等しいといえるものはありますか。



仮定から、 $BP = DQ$ がいえます。

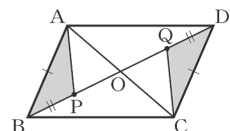


四角形 ABCD は平行四辺形だから、 $AB = CD$ だね。



では、これまでに考えたことを方針としてまとめましょう。

- ① AP = CQ を証明するためには、 $\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$ を示せばよい。
- ② $\triangle ABP$ と $\triangle CDQ$ の辺や角について、等しいことがわかるものを探せばよい。まず、平行四辺形 ABCD の性質から、 $AB = CD$ がわかるし、仮定から、 $BP = DQ$ もわかっている。
- ③ ② を使うと、 $\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$ が示せそうだ。



Ⅲ ⅠとⅡを結び付けるには、あと何がわかればよいか。



あと何がわかれば、 $\triangle ABP$ と $\triangle CDQ$ の合同がいえるでしょうか。

AP = CQ を使えば合同がいえるよ。

でも、AP = CQ は結論だから使えないよ。

$\angle ABP = \angle CDQ$ がいえれば、合同であることが示せるんじゃないかな。



B 4 (1) 正答率 33.1%

2つの辺の長さが等しいことを、三角形の合同を利用して証明する。

B 4 (2) 正答率 57.6%

2つの辺の長さが等しいことを証明する際に、根拠として用いる平行四辺形になるための条件を選ぶ。

[第2学年] B 図形 (2) ア, イ

2. 立てた方針に基づいて証明する。



方針にしたがって、証明しましょう。



方針が立てば、証明は書けそう。



証明の方針を立てるには、次のことが大切です。

ポイント!

- I 結論を示すためには何がわかればよいか。
- II 仮定からいえることは何か。
- III IとIIを結び付けるには、あと何がいえればよいか。

△ABPと△CDQにおいて、
 仮定より、 $BP = DQ$ …①
 平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、
 $AB = CD$ …②
 平行四辺形の向かい合う辺は平行だから、
 $AB \parallel DC$
 平行線の錯角は等しいから、
 $\angle ABP = \angle CDQ$ …③
 ①, ②, ③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle ABP \equiv \triangle CDQ$
 合同な図形の対応する辺の長さは等しいから、
 $AP = CQ$



今度は、△APOと△CQOの合同を示せばよいことに着目してみましょう。



△APOと△CQOについて、
 四角形ABCDは平行四辺形だから、 $OA = OC$ です。



他にも、対頂角は等しいので、 $\angle AOP = \angle COQ$ がいえるね。



あとは、 $PO = QO$ がいえれば合同であることが示せそうだね。



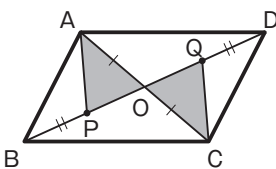
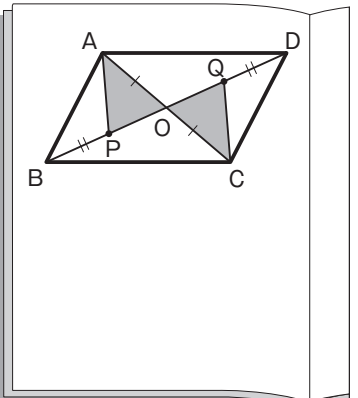
証明の方針を立てることはできましたか。



私はこんな方針を立てました。



証明の方針にもとづいて証明してみましょう。



- ① $AP = CQ$ を証明するためには、 $\triangle APO \equiv \triangle CQO$ を示せばよい。
- ② △APOと△CQOの辺や角について、等しいことがわかるものを探せばよい。
 まず、平行四辺形の性質から、 $OA = OC$ がわかるし、
 対頂角は等しいことから、 $\angle AOP = \angle COQ$ もわかる。
- ③ ②を使うと、 $\triangle APO \equiv \triangle CQO$ が示せそうだ。

△APOと△CQOにおいて、
 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから、
 $OA = OC$ …①
 対頂角は等しいから、
 $\angle AOP = \angle COQ$ …②
 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから、
 $OB = OD$
 仮定より、 $BP = DQ$
 よって、 $OB - BP = OD - DQ$
 $OB - BP = PO$, $OD - DQ = QO$ だから、
 $PO = QO$ …③
 ①, ②, ③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle APO \equiv \triangle CQO$
 合同な図形の対応する辺の長さは等しいから、
 $AP = CQ$



証明するためには、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質を見いだしたりして、証明の方針を立てることが大切です。

<2時間目>

AP = CQ を証明するために、他の図形にも着目してみよう。

3. 証明の新たな方針を立て、証明する。

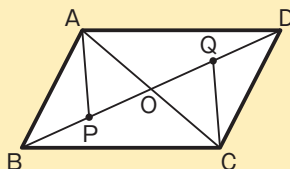


前の授業では、合同な三角形に着目して、 $AP = CQ$ を証明しました。
その中で、次のようにして証明の方針を立てることが大切だということがわかりました。

- I 結論を示すためには何がわかればよいか。
- II 仮定からいえることは何か。
- III I と II を結び付けるには、あと何がいえればよいか。



今日は、
三角形以外の図形に着目して、
証明することができるかどうか
考えてみましょう。



PC と QA をひいて四角形 APCQ をつくります。
もし、四角形 APCQ が平行四辺形だといえれば、
 $AP = CQ$ が成り立ちます。



補助線をひいて、AP と CQ を含むような図形をつくったのですね。
 $AP = CQ$ を証明するためには、四角形 APCQ が平行四辺形であることを示せばよいですね。



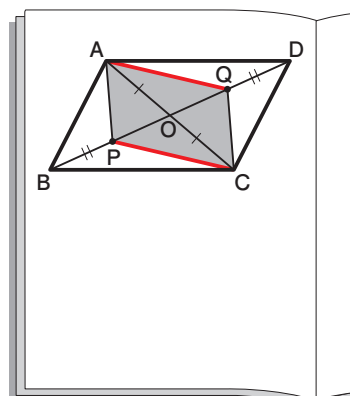
四角形 APCQ の辺や角について、等しいといえるものはありますか。



四角形 ABCD は平行四辺形なので、 $OA = OC$ が成り立ちます。



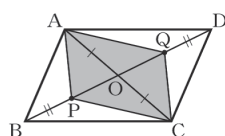
あとは、 $PO = QO$ がいえれば平行四辺形であることが示せそうですね。



- ① $AP = CQ$ を証明するためには、
四角形 APCQ が平行四辺形であることを示せばよい。

- ② 四角形 APCQ について、
平行四辺形 ABCD の性質から、 $OA = OC$ がわかる。

- ③ ② と仮定の $BP = DQ$ を使うと、四角形 APCQ が
平行四辺形であることは、対角線がそれぞれの中点で交わる
ことから示せそうだ。



四角形 APCQ において、
平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから、
 $OA = OC$ …①
 $OB = OD$
仮定より、 $BP = DQ$
よって、 $OB - BP = OD - DQ$
 $OB - BP = PO$, $OD - DQ = QO$ だから、
 $PO = QO$ …②
①, ②より、対角線がそれぞれの中点で交わるから、
四角形 APCQ は平行四辺形である。
平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、
 $AP = CQ$



着目する図形を変えると、証明の新しい方針が見つかって、別の証明もできますね。

もし、証明することができないときは、着目する図形を変えてみるとよさそうですね。

本授業アイデア例 活用のポイント

- 本アイデア例で取り上げた着目する図形の順序は一例である。証明の方針については、学級の実態に応じて、他の順序で取り上げたり、並列的に取り上げたりして授業を展開することも考えられる。また、 $\triangle APD$ と $\triangle CQB$ など、他の図形に着目して証明することも考えられる。
- 証明の方針を立てる際には、結論を構成する要素どうしが対応している図形や、それらの要素を含む図形に着目することが大切である。この授業では、AP と CQ が対応する辺となる 2 つの三角形に着目したり、AP と CQ を含む図形を構成したりすることが大切である。