

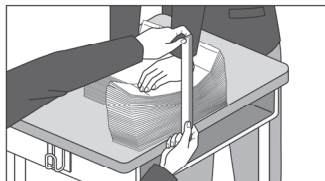
数学 6 事象の数学的な解釈と問題解決の方法（紙パック）

- 〔6〕 第一中学校では、リサイクルの取り組みとして容量が1000 mLの紙パックを集めています。生徒会役員の大輝さんと菜月さんは、紙パックを集める期間を1か月間とし、集まった紙パックの枚数を、全校生徒に報告しようと考えています。

最初の4日間で集まった紙パックの枚数が思っていたよりも多かったため、二人は、1か月間で集まった紙パックの枚数を全部数えるのは大変だと思いました。そこで、二人は、4日間で集まった紙パックの枚数を、次のようにして求めました。

大輝さんの求め方

4日間で集まった紙パックの合計の厚さは16.2 cmでした。



その中から取り出した、紙パック10枚の厚さは0.8 cmだったので、紙パック1枚の厚さをすべて0.08 cmと考えると、
 $16.2 \div 0.08 = 202.5$
 したがって、4日間で集まった紙パックの枚数は約203枚です。

菜月さんの求め方

4日間で集まった紙パックの合計の重さは5742 gでした。その中から取り出した、紙パック1枚の重さは30.0 gだったので、紙パック1枚の重さをすべて30.0 gと考えると、
 $5742 \div 30 = 191.4$
 したがって、4日間で集まった紙パックの枚数は約191枚です。

次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。

- (1) 前ページの大輝さんの求め方のように、紙パック10枚の厚さがわかっているとき、紙パックの枚数を求めるために、次のような考えが使われています。

紙パックの枚数を全部数えなくても、紙パックの合計の を調べれば、紙パックの枚数が求められるので、枚数を に置きかえて考える。

上の には、同じ言葉が当てはまります。その言葉を書きなさい。

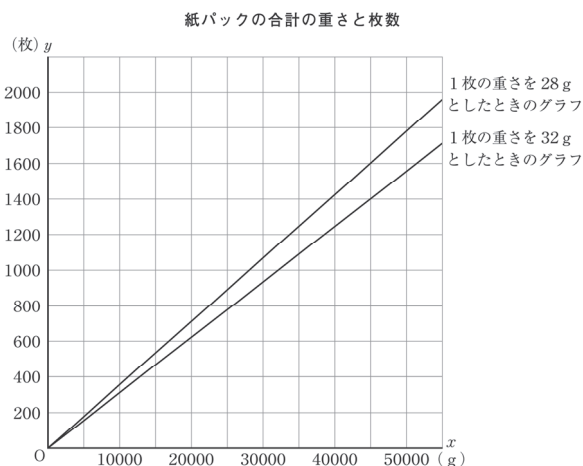
- (2) 二人は、7ページの菜月さんの求め方をもとに、1か月間で集まった紙パックの合計の重さが何gであっても、集まった紙パックの枚数を求められるようにしたいと思いました。そこで、菜月さんの求め方から、集まった紙パックの枚数と紙パックの合計の重さの関係を、次の式で表しました。

$$\left(\begin{array}{c} \text{紙パックの} \\ \text{枚数} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{紙パックの} \\ \text{合計の重さ} \end{array} \right) \div \left(\begin{array}{c} \text{紙パック} \\ \text{1枚の重さ} \end{array} \right)$$

また、二人は、紙パック1枚の重さに違いがあるのではないかと考えました。そこで、集まった紙パックの中から何枚か取り出してそれぞれの重さをはかってみたところ、紙パックによって、1枚の重さが異なることがわかりました。その中で、最も軽かった紙パックは28 g、最も重かった紙パックは32 gでした。二人は、紙パック1枚の重さを28 gとしたときと、32 gとしたときの紙パックの枚数について話し合っています。

大輝さん「式を使えば、紙パックの合計の重さをもとに紙パックの枚数がそれぞれ求められるね。」
 菜月さん「紙パック1枚の重さを28 gとしたときと、32 gとしたときでは、求められる紙パックの枚数に違いがあるのではないかな。」

集まった紙パックの合計の重さを x g としたときの、紙パックの枚数を y 枚とします。二人は、紙パック1枚の重さを28 gとしたときと、32 gとしたときの x と y の関係を、それぞれ次のような比例のグラフに表しました。



1か月間で集まった紙パックの合計の重さを45000 gとします。このとき、紙パックの枚数の違いがおよそ何枚になるかは、上のグラフから求めることができます。その方法を説明しなさい。ただし、実際に枚数の違いを求める必要はありません。

1. 出題の趣旨

事象における数量の関係を見だし考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。

- ・ 事象の特徴を的確に捉えること
- ・ 数学的に表現したことを事象に即して解釈すること
- ・ 問題解決の方法を数学的に説明すること

日常生活や社会の事象を考察する場面では、事象から必要な情報を選択したり、グラフを事象に即して捉えたりして、数学的な結果を事象に即して解釈することが求められる場合がある。その際、問題解決の方法を考え、それを数学的に説明することが大切である。

本問では、集まった紙パックの枚数を直接数えずに求める場面を取り上げた。この場面において、比例の関係を基に紙パックの厚さを調べて枚数を求める状況を設けた。さらに、1 か月間で集まった紙パックの合計の重さを 45000 g としたとき、紙パック 1 枚の重さを 28 g とした場合と 32 g とした場合では、求められる紙パックの枚数にどのくらいの違いがあるかについて求める方法を、グラフを用いて説明する文脈を設定した。

2. 調査問題の活用にあたって

(1) 設問(1) の趣旨を生かした学習指導の工夫

■学習指導要領における領域・内容

〔第 1 学年〕 C 関数

- (1) 具体的な事象の中から二つの数量を取り出し、それらの変化や対応を調べることを通して、比例、反比例の関係についての理解を深めるとともに、関数関係を見だし表現し考察する能力を培う。
- オ 比例、反比例を用いて具体的な事象をとらえ説明すること。

【指導のねらい】

事象における数量の関係を見だし、それを的確に捉えることができるようにする。

【活用のポイント】

- 紙パックの枚数を直接数えずに求めるために、紙パックの枚数に関係する他の数量を使って調べられないかと考えて事象を観察し、伴って変わる 2 つの数量を見いだす場面を設定することが大切である。
- 見いだした 2 つの数量における比例の関係を基に、紙パックの枚数を表、式、グラフなどを利用して調べる場面を設定することが大切である。

(2) 設問(2) の解答類型を活用した学習指導の工夫

■学習指導要領における領域・内容

〔第1学年〕 C 関数

(1) 具体的な事象の中から二つの数量を取り出し、それらの変化や対応を調べることを通して、比例、反比例の関係についての理解を深めるとともに、関数関係を見いだし表現し考察する能力を培う。

エ 比例、反比例を表、式、グラフなどで表し、それらの特徴を理解すること。

オ 比例、反比例を用いて具体的な事象をとらえ説明すること。

設問(2)では、事象における数量の関係を見いだし考察する場面において、問題解決の方法について説明することを求めている。

紙パック1枚の重さを28 gとしたときと、32 gとしたときでの求められる紙パックの枚数の違いを調べるために、グラフを用いることとし、その「用い方」について数学的に説明するものである。その際、グラフの「用い方」として、紙パックの合計の重さが45000 gであることから、グラフの x 座標が45000である点に着目することを明示する必要がある。その上で、 x 座標が45000である点の y の値の差を求めることや、2点間の y 軸方向の距離を読むことを記述する必要がある。解答類型については、次のとおりである。

解答類型

解 答 類 型		正答
(正答の条件) 次の(a)、(b)又は(a)、(c)について記述しているもの。 (a) 1枚の重さを28 gとしたときのグラフと1枚の重さを32 gとしたときのグラフの x 座標が45000である点に着目すること。 (b) 上記(a)に対応する y の値の差を求めること。 (c) 上記(a)に対応する2点間の y 軸方向の距離を読むこと。		
1	(a)、(b)について記述しているもの。 (正答例) ・ 1枚の重さを28 gとしたときのグラフと1枚の重さを32 gとしたときのグラフについて、 x の値が45000のときの y の値の差を求める。	◎
2	(a)について、 x を用いた記述がなく、(b)について記述しているもの。 (正答例) ・ 2つのグラフが45000 gのときの y の値の差を求める。 ・ 45000 gのときの y の値の差を求める。	○
3	(b)についての記述が十分でなく、(a)について記述しているもの。 (正答例) ・ 2つのグラフの x の値が45000のとき、枚数の差を求める。 ・ 2つのグラフの x の値が45000のときの y の値を読む。	○
4	(a)、(c)について記述しているもの。 (正答例) ・ 1枚の重さを28 gとしたときのグラフと1枚の重さを32 gとしたときのグラフについて、 x の値が45000のときの2点間の y 軸方向の距離を読む。	◎
5	(a)について、 x を用いた記述がなく、(c)について記述しているもの。 (正答例) ・ 2つのグラフが45000 gのときの2点間の縦方向の距離を読む。	○
6	(c)についての記述が十分でなく、(a)について記述しているもの。 (正答例) ・ 2つのグラフの x 座標が45000のときの縦方向の距離を読む。	○

7	(a)について、 x を用いた記述がなく、(b)についての記述が十分でないもの。 (例) ・ 2つのグラフが45000のときの枚数の差を求める。 ・ 2つのグラフが45000のときの y の値を読む。	
8	(a)について、 x を用いた記述がなく、(c)についての記述が十分でないもの。 (例) ・ グラフが45000のときの縦方向の長さを読む。 ・ 2つのグラフが45000のときの2点間の長さを読む。	
9	(a)のみを記述しているもの。(a)について、 x を用いた記述がないものを含む。 (例) ・ 2つのグラフの x の値が45000のときを求める。	
10	(b)のみを記述しているもの。(b)についての記述が十分でないものを含む。 (例) ・ 2つのグラフの y の値の差を求める。	
11	(c)のみを記述しているもの。(c)についての記述が十分でないものを含む。 (例) ・ 2つのグラフの2点間の縦方向の距離を読む。	
12	グラフを用いることについて記述しているが、(a)、(b)、(c)について記述していないもの。 (例) ・ 2つのグラフを見ればわかる。	
99	上記以外の解答	
0	無解答	

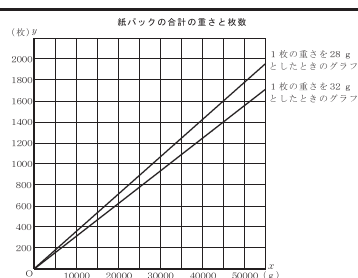
事柄を調べる方法や手順を説明する問題（方法・手順の説明）については、過年度調査の結果から、グラフにおいて着目すべきところについて指摘することができることはわかっている。よって、本設問においては、1枚の重さを28 gとしたときのグラフと、1枚の重さを32 gとしたときのグラフの x 座標が45000である点に着目しているが、「 y の値の差を求める」ことや「2点間の y 軸方向の距離を読む」ことを表現することができないといった解答類型9の反応率が高くなることが予想される。このことを踏まえて、次のような指導事例を紹介する。

【指導のねらい】

事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することができるようにする。

【授業アイディア例】

紙パックの枚数は重さに比例しているという関係を利用して、1か月間で集まった紙パックのおよその枚数を調べようとしています。紙パック1枚の重さを、最も軽かった28 gとしたときと、最も重かった32 gとしたときの2つの比例のグラフをかくと、右のようになります。



1. 集まった紙パックの枚数の違いを比例のグラフを基に求める方法について見通しをもつ。



教師

このグラフからどんなことがわかりますか。



縦軸が枚数、横軸が重さを表しているグラフだね。

どちらも原点を通る右上がりの直線だね。



重さが増えると、それに伴って枚数も増えているね。

右にいくほど、2つのグラフの開きが大きくなっているよ。





2つの比例のグラフについて、その開きが大きくなっているというのは、重さ x が大きくなると、枚数 y はどのようにになっているということですか。



重さが増えるほど、枚数の違いも大きくなるということです。

2つの y の差が大きくなっています。



集まった紙パックの重さを、例えば45000 gとします。そのとき、集まった紙パックの枚数の違いは、グラフからわかりそうですか。



45000 gのところを見るとわかりそうですね。

45000 gのところは、グラフのどこかな。



x が45000のところだよ。

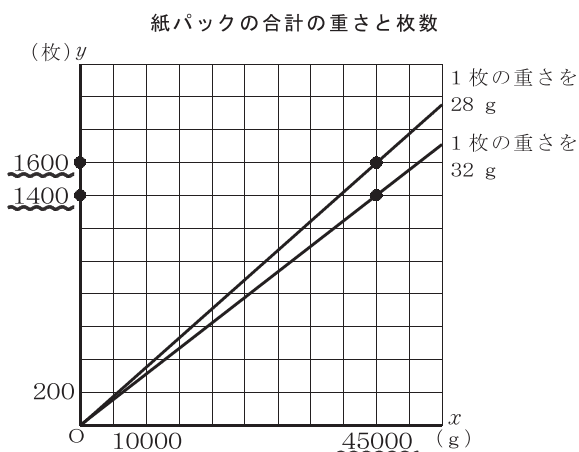
2. グラフのどこに着目し、どのように説明すればよいかを考える。



2つの比例のグラフにおいて、 $x = 45000$ のところに着目して、紙パックの枚数の違いを求める方法について話し合しましょう。



$x = 45000$ のときの、2つの y のところを見ればわかるね。



2つの y のところをただだけでは枚数の違いはわからないよ。



1600 - 1400を計算すればいいと思うよ。枚数の違いは200枚だ。

2つの y の値の差を計算すると枚数の違いがわかるということだね。



今、話し合ったことをまとめて、集まった紙パックの枚数の違いについて、求める方法を説明してみましょう。



2つの比例のグラフにおいて、 $x = 45000$ のときの2つの y の値の差を求めることで、集まった紙パックの枚数の違いが200枚だとわかります。



集まった紙パックの枚数の違いを求める方法は、グラフの2つの y の値の差を求めると説明できそうです。



最初は、グラフの45000のところを見ればわかると言っていましたが、2つの比例のグラフのどこをどのように見ればよいかということについて明らかにして、枚数の違いを求める方法を説明することができましたね。



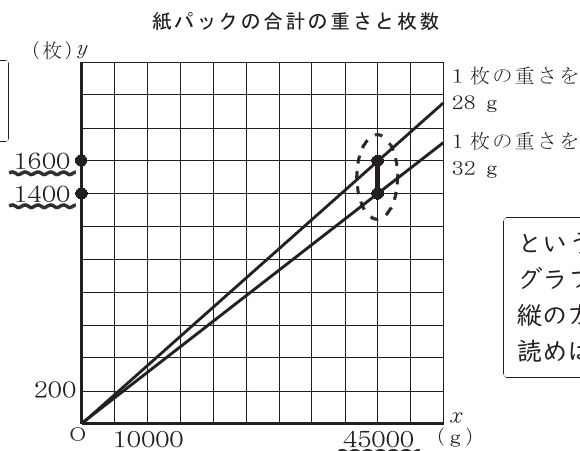
2つの比例のグラフから紙パックの枚数の違いを求める他の方法はありませんか。



さっきは差を求めたんだけど…。



$x = 45000$ のときの、2つの比例のグラフの2点の間の長さを見ればよいよ。点線で囲んだところだよ。



枚数の違いの200枚はグラフではどこに表れているのかな。



ということは、このグラフの2点間の縦の方向の長さを読めばわかるね。



では、紙パックの枚数の違いを求める他の方法について説明してみましょう。



2つのグラフについて、 x の値が45000のときの2点間の縦の方向の長さを読むことでも、枚数の違いが200枚とわかります。



$x = 45000$ のときの2つの比例のグラフにおいて、グラフの2点の間に着目して、枚数の違いを求める方法についてまとめることができました。

3. 問題解決の方法について、見通しを基にして振り返る。



集まった紙パックの枚数の違いを求める方法について、最初の見通しと、まとめた方法について振り返ってみましょう。



最初はグラフの x が45000のところを見ればわかると考えていたけど、方法の説明として足りなかった。説明に加えたことを、ノートにまとめてみよう。

振り返り

集まった紙パックの枚数の違いを求めるには、最初は、グラフの x が45000のところを見ればわかると考えていました。でも、解決するためにはグラフの $x = 45000$ のときの2つの y の値の差を求めなければならないことがわかりました。グラフをどのように見るかについて、説明することが大切だとわかりました。



集まった紙パックの枚数の違いを求める方法について話し合いました。その中で、どのようにグラフを見ればよいか考え、グラフの見方について深めることができましたね。

【活用のポイント】

- 問題解決するためにグラフにおいて着目すべき点と、その着目した点をどのように見ると問題解決につながるかを確認することが大切である。
- 問題解決の方法を説明し合う場面を設定し、説明が不十分だった際には、どのように考えることが問題解決につながるかを検討することで、よりよい数学的な表現を用いた説明の仕方に気付くことができるようにすることが大切である。
- 最初に立てた方法の見通しと、問題解決に用いた方法について比較・検討するなどといった振り返りの場面を授業の最後に設定することが大切である。