

数学 9 連立方程式を解く過程を振り返り、考察すること（連立方程式）

- 9 太一さんは、壁にかかれた枠に向かってボールを何回か投げ、次の
得点設定 1 でゲームを行いました。

得点設定 1

- ☐ 枠の内側に 1 回当たるとの得点を 3 点とする。
☐ 枠の外側に 1 回当たるとの得点を 2 点とする。

太一さんが得点設定 1 でゲームをした結果、投げた回数は 18 回、合計得点は 47 点でした。里奈さんは、太一さんの結果を聞いて、枠の内側、枠の外側にそれぞれ何回当たったかが気になりました。そこで、里奈さんは次の連立方程式をつくり、それを解き、枠の内側、枠の外側にそれぞれ 11 回、7 回当たったということがわかりました。

里奈さんがつくれた連立方程式

枠の内側に当たった回数を x 回、
枠の外側に当たった回数を y 回とすると、
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 3x + 2y = 47 \end{cases}$$

里奈さんは、枠の内側に当たった回数を、投げた回数と合計得点をもとにして、すぐに求められることを洋平さんから聞きました。

洋平さんの求め方

手順① 投げた回数に、枠の外側に 1 回当たるとの得点をかける。
手順② 合計得点から手順①の計算結果をひく。

里奈さんは、上の洋平さんの求め方によって枠の内側に当たった回数を求めてみました。

投げた回数の 18 に、得点の 2 をかける。 $18 \times 2 = 36$
合計得点の 47 から 36 をひく。 $47 - 36 = 11$

前ページの洋平さんの求め方によって枠の内側に当たった回数を求めた結果は 11 回で、連立方程式によって求めた結果と同じになりました。里奈さんは、ゲームを何度か行ったところ、洋平さんの求め方によって求めた結果は、実際のゲームの結果と同じになりました。

次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。

- (1) 里奈さんは、前ページの洋平さんの求め方で、どうして枠の内側に当たった回数を求められるのかを考えようと思いました。そこで、投げた回数が 15 回で、合計得点が 40 点となる場合について、連立方程式をつくり、それを解く過程と洋平さんの求め方を比べることにしました。

次の連立方程式を解く過程 1 には、手順①、②にそれぞれ対応する計算があります。手順①に対応する計算がある部分は、連立方程式を解く過程 1 の下線部です。手順②に対応する計算がある部分を、下のアからエまでの中から 1 つ選びなさい。

連立方程式を解く過程 1

枠の内側に当たった回数を x 回、枠の外側に当たった回数を y 回とすると、
$$\begin{cases} x + y = 15 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 2y = 40 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①の両辺を 2 倍すると、 $2x + 2y = 30 \cdots \cdots \textcircled{3}$
②から③をひくと、 $3x + 2y = 40$
$$\begin{array}{r} -) 2x + 2y = 30 \\ \hline x = 10 \end{array} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④を①に代入すると、 $10 + y = 15$
$$\begin{array}{r} y = 15 - 10 \\ y = 5 \end{array} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④、⑤より、 $x = 10, y = 5$

ア $3x + 2y = 40$
イ $10 + y = 15$
ウ $y = 15 - 10$
エ $x = 10, y = 5$

- (2) 三人は、得点設定 1 を、次の得点設定 2 に変えてゲームを行いました。

得点設定 2

- ☐ 枠の内側に 1 回当たるとの得点を 5 点とする。
☐ 枠の外側に 1 回当たるとの得点を 2 点とする。

太一さんが得点設定 2 でゲームをした結果、投げた回数は 25 回、合計得点は 92 点でした。里奈さんは、19 ページの洋平さんの求め方を使えば、投げた回数と合計得点をもとに、枠の内側に当たった回数を求められると考え、洋平さんの求め方によって次の計算をしました。

投げた回数の 25 に、得点の 2 をかける。 $25 \times 2 = 50$
合計得点の 92 から 50 をひく。 $92 - 50 = 42$

洋平さんの求め方によって求めた結果は 42 となりました。この 42 は、投げた回数の 25 よりも大きいので、枠の内側に当たった回数ではありません。

里奈さんは、得点設定 2 でも、洋平さんの求め方のように枠の内側に当たった回数をすぐに求められる方法を考えようと思いました。そこで、連立方程式をつくり、それを解く過程と洋平さんの求め方を比べて、その方法を考えます。

連立方程式を解く過程 2

枠の内側に当たった回数を x 回、枠の外側に当たった回数を y 回とすると、
$$\begin{cases} x + y = 25 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5x + 2y = 92 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①の両辺を 2 倍すると、 $2x + 2y = 50 \cdots \cdots \textcircled{3}$
②から③をひくと、 $5x + 2y = 92$
$$\begin{array}{r} -) 2x + 2y = 50 \\ \hline 3x = 42 \\ x = 14 \end{array} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④を①に代入すると、 $14 + y = 25$
$$\begin{array}{r} y = 25 - 14 \\ y = 11 \end{array} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④、⑤より、 $x = 14, y = 11$

里奈さんは、上の連立方程式を解く過程 2 の $\boxed{\quad}$ の部分から、19 ページの洋平さんの求め方に新たな手順を加えることで、前ページの得点設定 2 でも、投げた回数と合計得点をもとに、枠の内側に当たった回数を求められることに気づきました。

里奈さんの求め方

手順① 投げた回数に、枠の外側に 1 回当たるとの得点をかける。
手順② 合計得点から手順①の計算結果をひく。
手順③ 手順②の計算結果を 3 でわる。

上の里奈さんの求め方において、新たな手順③の「手順②の計算結果を 3 でわる。」のわる数である 3 がどんな数であるかを考えます。わる数の 3 がどんな数であるかは、前ページの得点設定 2 の条件をもとに説明することができます。里奈さんの求め方の手順③において、わる数の 3 は、どんな数ですか。「3は、42である。」という形で書きなさい。

1. 出題の趣旨

事象を数学的に考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。

- ・ 数学的に表現したことを事象に即して解釈すること
- ・ 解決の過程や結果を振り返り評価・改善すること
- ・ 事柄の特徴を数学的な表現を用いて説明すること

事象を数学的に考察する場面では、数量の関係を捉えて方程式をつくり、それを解いて得られた解や解いた過程を振り返り、事象に即して解釈することが大切である。

本問では、ボールを投げて得点を競うゲームについて、連立方程式を用いて解く過程を振り返り、枠の内側に当てた回数をすぐに求められる方法と連立方程式を解く過程を関連付ける場面を取り上げた。この場面において、**洋平さんの求め方**における**手順②**に対応する計算は、連立方程式を解く過程のどの部分にあたるかを判断する状況を設けた。さらに、得点設定を変えたゲームにおいて、枠の内側に当てた回数をすぐに求められる方法を考える際に、連立方程式を解く過程を振り返り、**洋平さんの求め方**に加えた**里奈さんの求め方の手順③**に含まれる数がどんな数であるかを、事象と連立方程式を解く過程とを関連付けて説明する文脈を設定した。

2. 調査問題の活用にあたって

(1) **設問(1)** の趣旨を生かした学習指導の工夫

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 A 数と式

- (1) 具体的な事象の中に数量の関係を見だし、それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりする能力を養うとともに、文字を用いた式の四則計算ができるようにする。

イ 文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること。

- (2) 連立二元一次方程式について理解し、それをを用いて考察することができるようにする。

イ 連立二元一次方程式の必要性と意味及びその解の意味を理解すること。

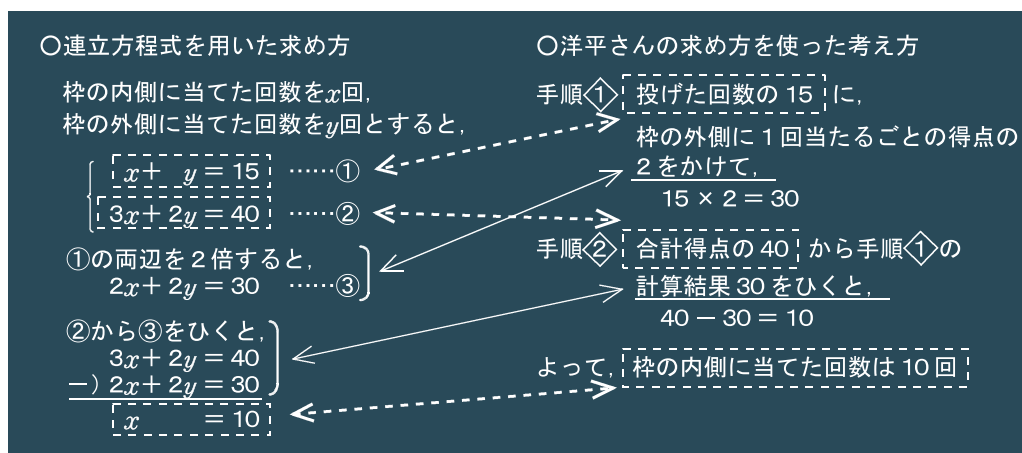
ウ 簡単な連立二元一次方程式を解くこと及びそれを具体的な場面で活用すること。

【指導のねらい】

連立方程式を解く過程を、事象に即して解釈することができるようにする。

【活用のポイント】

- 得点設定 1 の場合、「枠の内側に当てた回数をすぐに求める方法」として洋平さんの求め方が正しいことについて、連立方程式を解く過程と関連付けて説明する活動を取り入れることが大切である。その際、次のように求め方を並べて書くなどの工夫を取り入れることが考えられる。



(2) 設問(2) の解答類型を活用した学習指導の工夫

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 A 数と式

- (1) 具体的な事象の中に数量の関係を見だし、それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりする能力を養うとともに、文字を用いた式の四則計算ができるようにする。
 - イ 文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること。
- (2) 連立二元一次方程式について理解し、それをを用いて考察することができるようにする。
 - イ 連立二元一次方程式の必要性和意味及びその解の意味を理解すること。
 - ウ 簡単な連立二元一次方程式を解くこと及びそれを具体的な場面で活用すること。

設問(2)では、数量についての考察場面において、見いだした事実を説明することを求めている。

「わる数の3」がどんな数であるかを、得点設定2と連立方程式を解く過程2とを関連付けて説明するものである。「わる数の3」の3は、連立方程式を解く過程2における $5x$ と $2x$ の差である $3x$ の係数であることに着目し、そのことを事象に即して解釈することで、わる数の3について枠の内側に1回当たるとの得点の5点と枠の外側に1回当たるとの得点の2点との差であることを記述する必要がある。解答類型については、次のとおりである。

解答類型

解 答 類 型		正答
(正答の条件) 「〇〇は、◇◇である。」という形で、次の(a), (b)を記述しているもの。 (a) 〇〇が、「わる数の3」である。 (b) ◇◇が、「枠の内側に1回当たるとの得点の5点と枠の外側に1回当たるとの得点の2点との差」である。		
1	(a), (b)について記述しているもの。 (正答例) ・ わる数の3は、枠の内側に1回当たるとの得点の5点と枠の外側に1回当たるとの得点の2点との差である。	◎
2	(b)のみを記述しているもの。 (正答例) ・ 枠の内側に1回当たるとの得点の5点と枠の外側に1回当たるとの得点の2点との差である。	○
3	(b)についての記述が十分でないもの。(a)についての記述がないものを含む。 (例) ・ わる数の3は、差である。	
4	(a)について記述し、(b)以外でわる数の3がどんな数であることを正しく記述しているもの。 (正答例) ・ わる数の3は、連立方程式を解く過程2で $5x$ から $2x$ をひいた式である $3x$ の x の係数である。	◎
5	上記4について、(a)についての記述がないもの。 (正答例) ・ 連立方程式を解く過程2で $5x$ から $2x$ をひいた式である $3x$ の x の係数である。	○
6	上記4, 5について、記述が十分でないもの。(a)についての記述がないものを含む。 (例) ・ わる数の3は、 $5x$ と $2x$ の差である。 ・ わる数の3は、 x の係数である。	
99	上記以外の解答	
0	無解答	

本設問のような連立方程式を解く過程を振り返り、事象に即して解釈し、事柄の特徴を数学的に説明することについては、**洋平さんの求め方**に加えた**里奈さんの求め方の手順③**に含まれる数がどんな数であることを説明する際に、わる数の3がどんな数であるかを見いだすことができないといった解答類型0の反応率が高くなることが予想される。このことを踏まえて、次のような指導事例を紹介する。

【指導のねらい】

連立方程式を解く過程を振り返り、事象に即して解釈し、事柄の特徴を数学的に説明できるようにする。

【授業アイディア例】

得点設定が変わっても、枠の内側に当てた回数をすぐに求められる方法を考えてみましょう。

洋平さんの求め方

手順① 投げた回数に、枠の外側に1回当たるときの得点をかける。

手順② 合計得点から手順①の計算結果をひく。

1. 得点設定2に変わっても得点設定1のときと同じように求められるか調べる。



教師

得点設定を右の得点設定2のように変えて、ゲームを行います。そのとき、投げた回数が25回で合計点数が92点でした。得点設定をこのように変えても、枠の内側に当てた回数を洋平さんの求め方ですぐに求めることができるでしょうか。

得点設定2

○ 枠の内側に1回当たるときの得点を5点とする。

○ 枠の外側に1回当たるときの得点を2点とする。



洋平さんの求め方で計算すると、枠の内側に当てた回数は42回になったよ。



投げた回数は25回なのに、枠の内側に当てた回数がそれよりも多い42回になるのはおかしいよ。



連立方程式を使って求めると、枠の内側に14回、枠の外側に11回当てたことがわかるね。



どうして今度は洋平さんの求め方では求めることができなかったのかな。

手順① 投げた回数の25に得点の2をかけると、
 $25 \times 2 = 50$

手順② 合計得点の92から50をひくと、
 $92 - 50 = 42$

枠の内側に当てた回数を x 回、
枠の外側に当てた回数を y 回とすると、
$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 5x + 2y = 92 \end{cases}$$

これを解くと、 $x = 14, y = 11$

2. 得点設定2でもすぐに求められる方法を説明する。



得点設定が変わっても、すぐに求められる方法を考えます。得点設定1のときには、洋平さんの求め方が正しいことを連立方程式を解く過程を振り返って確認しましたね。同じようにして考えてみましょう。



得点設定1で考えたときと比べてみると、手順①、②のところは同じようになっているよ。

得点設定1のときは、手順②で回数を求めることができたよね。



$3x = 42$ の両辺を3でわると、
という計算はなかったよね。

そうか。ということは、洋平さんの求め方に「手順②の計算結果を3でわると」という手順③を加えればいいんだ。



○連立方程式を用いた求め方

枠の内側に当てた回数を x 回、
枠の外側に当てた回数を y 回とすると、

$$\begin{cases} x + y = 25 & \cdots \cdots ① \\ 5x + 2y = 92 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①の両辺を2倍すると、
 $2x + 2y = 50 \cdots \cdots ③$

$$\begin{array}{r} ②から③をひくと、 \\ 5x + 2y = 92 \\ -) 2x + 2y = 50 \\ \hline 3x = 42 \\ x = 14 \end{array}$$

○洋平さんの求め方を使った考え方

手順① 投げた回数の25に、
枠の外側に1回当たるときの得点の2をかけて、
 $25 \times 2 = 50$

手順② 合計得点の92から手順①の
計算結果50をひくと、
 $92 - 50 = 42$

手順③を新たに加える
手順②の計算結果を3でわると、
 $42 \div 3 = 14$

よって、枠の内側に当てた回数は14回



洋平さんの求め方に新たな手順③として「手順②の計算結果を3でわる」を加えることで、枠の内側に当てた回数をすぐに求めることができました。
手順③において、わる数の3はどんな数かを説明してみましょう。



$5x - 2x$ をして $3x$ がでてきたから両辺を3でわったよね。

$5 - 2 = 3$ 。つまり x の係数の差ということだね。



3は x の係数の差を表しているのですね。 x の係数の5と2は何を表していますか。



$5x$ の x の係数5は、枠の内側に当たる得点の5点を表し、 $2x$ の x の係数2は、枠の外側に当たる得点の2点を表しています。



だから、わる数の3は、枠の内側に1回当たるとの得点の5点と枠の外側に1回当たるとの得点の2点との差だといえます。



連立方程式を解く過程を振り返ることで、新たに加えた手順③のわる数の3の意味がわかりましたね。

得点設定2 すぐに求められる方法

- 手順① 投げた回数に、枠の外側に1回当たるとの得点をかける。
手順② 合計得点から手順①の計算結果をひく。
手順③ 手順②の計算結果を③でわる。

わる数の3は、枠の内側に1回当たるとの得点の5点と枠の外側に1回当たるとの得点の2点との差である。

3. 得点設定1のときの洋平さんの求め方について、振り返って考察する。



得点設定1のときの洋平さんの求め方に、手順③が必要なかったのはどうしてでしょうか。



得点設定2で得点の差が3ということから手順③を加えたけど、得点設定1ではどうなるかな。



得点の差は1だから、手順③として「手順②の計算結果を得点差1でわる」が隠れていたんだね。



計算結果を1でわっても結果は同じだから、得点設定1で手順③が必要なかったんだね。

得点設定1

- 枠の内側に1回当たるとの得点を3点
- 枠の外側に1回当たるとの得点を2点

洋平さんの求め方

- 手順① 投げた回数に、枠の外側に1回当たるとの得点をかける。
手順② 合計得点から手順①の計算結果をひく。

(手順③ 手順②の計算結果を得点差1でわる。)

【活用のポイント】

- 新たに加えた手順である「手順②の計算結果を3でわる。」を見いだした過程を振り返ったり、文字を用いた式の意味を読み取ったりすることで、わる数の3はどんな数であるかについて、事柄の特徴を捉え、それを数学的に説明することが大切である。
- 得点設定をいろいろに変えても、枠の内側に当てた回数をすぐに求めることができるようにするために、手順③について「手順②の計算結果を得点差でわればよい」ということを見いだす場面を設定することも考えられる。