

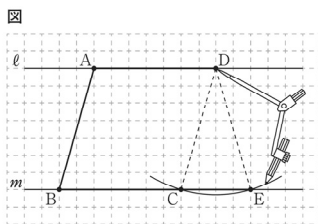
数学 3 反例

- 3 優真さんは、次の予想がいつでも成り立つかどうかについて考えています。

予想

1組の向かい合う辺が平行で、もう1組の向かい合う辺の長さが等しい四角形ならば、その四角形は平行四辺形である。

上の予想がいつでも成り立つかどうかを、図をかくて考えることにしました。下の図のように、はじめに、平行な2直線 ℓ 、 m 上に3点A、B、Dをとり、線分AB、ADをかきました。次に、点Dを中心として、線分ABの長さと同じ半径の円をかくところ、直線 m と2点C、Eで交わり、平行四辺形になる四角形ABCDと、平行四辺形にならない四角形ABEDの2つがかけました。



前ページの予想がいつでも成り立つかどうかを示すことについて、止しく述べたものを、下のアからエまでの中から1つ選びなさい。

ア 予想がいつでも成り立つことを示すためには、図のように平行四辺形になる四角形ABCDが1つかければよい。

イ 予想がいつでも成り立つことを示すためには、点A、B、Dの位置を変えて、図の平行四辺形ABCDのほかに、平行四辺形になる四角形をかく必要がある。

ウ 予想がいつでも成り立つとはいえないことを示すためには、図のように平行四辺形にならない四角形ABEDが1つかければよい。

エ 予想がいつでも成り立つとはいえないことを示すためには、点A、B、Dの位置を変えて、図の四角形ABEDのほかに、平行四辺形にならない四角形をかく必要がある。

出題の趣旨

命題や推測した事柄について考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。

- ・筋道を立てて考えること
- ・反例の意味を理解していること

命題や推測した事柄について考察する場面では、命題や事柄が常に成り立つことを説明するだけでなく、常に成り立つとは限らないことも説明できるようにすることが大切である。

本問は、反例の意味を理解しているかどうかをみる問題である。反例は、命題や事柄が常に成り立つとは限らないことを説明する際に必要であることから出題した。

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 B 図形

- (2) 図形の合同について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(イ) 証明の必要性和意味及びその方法について理解すること。

1. 解答類型と反応率

問題番号		解 答 類 型		反応率 (%)	正答
3		1	ア と解答しているもの。	13.9	◎
		2	イ と解答しているもの。	27.0	
		3	ウ と解答しているもの。	45.5	
		4	エ と解答しているもの。	13.2	
		99	上記以外の解答	0.0	
		0	無解答	0.4	

2. 分析結果と課題

- 正答率は 45.5% であり、反例の意味の理解に課題がある。
- 解答類型 4 の反応率は 13.2% である。この中には、のように平行四辺形ではない四角形ABEDが1つかけたことから、**予想**が成り立つとはいえないと考え、それを示すために、反例を複数あげる必要があると捉えた生徒がいると考えられる。
- 解答類型 1 の反応率は 13.9% である。この中には、のように平行四辺形ABCDが1つかけたことから、**予想**がいつでも成り立つと捉えた生徒がいると考えられる。
- 解答類型 2 の反応率は 27.0% である。この中には、のように平行四辺形ABCDが1つかけたことから、**予想**がいつでも成り立つと考え、さらに点A、B、Dの位置を変えて、の平行四辺形ABCD以外の平行四辺形を見付けることができれば、**予想**がいつでも成り立つことを示すことができると捉えた生徒がいると考えられる。

3. 学習指導に当たって

○ 反例の意味を理解できるようにする

命題や幾つかの場合から推測した事柄について考察する場面では、命題や事柄が常に成り立つことを説明するだけでなく、常に成り立つとは限らないことも説明できるようにすることが大切である。また、命題が常に成り立つとは限らないことを示すには反例を一つあげればよいことや、反例は命題の仮定を満たしているが、結論を満たしていない例であることを理解できるように指導することも大切である。

本問を使って授業を行う際には、一組の向かい合う辺が平行で、もう一組の向かい合う辺の長さが等しいという条件を満たす四角形を作図し、作図した四角形がいつでも平行四辺形になるかどうかを考察する活動を取り入れることが考えられる。その際、作図した四角形の中には、反例となる四角形（等脚台形）があることに気づき、**予想**が常に成り立つとは限らないことを説明することが考えられる。

○ 反例を見いだし用いることで命題が常に成り立つとは限らないことを説明できるようにする

ある事象について予想した事柄が成り立つかどうかを判断するために、仮定を満たすような具体例を幾つかあげ、それらが結論を満たすかどうかを調べる活動を取り入れることが考えられる。その際、事柄が成り立つと考えた場合には根拠を明らかにして説明したり、いつでも成り立つとは限らないと考えた場合には反例をあげて説明したりする活動を取り入れることが大切である。

例えば、第2学年における、数に関する性質を調べるといった学習において、平成26年度【中学校】数学B²「偶数の四則計算」で取り上げたように、「2つの偶数の和は、偶数になる」ことについて説明したあとに、2つの偶数の積に着目し、具体的な幾つかの数についての計算などを通して、2つの偶数の積は常に8の倍数になるかどうかを判断する活動を取り入れることが考えられる。このとき、いろいろな2つの偶数の積を取り上げ、その積の中に8の倍数にならないものを見いだし、反例としてあげることで、この事柄が常に成り立つとは限らないことを説明できるようにすることが大切である。

上記のように、「A数と式」の領域などにおいても、反例をあげて命題が常に成り立つとは限らないことを説明することがあることから、場面に応じて適宜指導することが大切である。

(参照)

- ①「平成26年度【中学校】解説資料」 pp. 97-103

https://www.nier.go.jp/14chousa/pdf/14kaisetsu_chuu_suugaku.pdf#page=99

- ②「平成26年度【中学校】報告書」 pp. 104-109

<https://www.nier.go.jp/14chousakekkahoukoku/report/data/mmath.pdf#page=108>

- ③「平成26年度【中学校】授業アイデア例」 pp. 17-18

<https://www.nier.go.jp/jugyourei/h26/data/m.pdf#page=18>

①平成26年度【中学校】解説資料



②平成26年度【中学校】報告書



③平成26年度【中学校】授業アイデア例



授業アイデア例

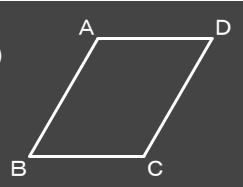
平行四辺形になるための条件について考えよう
 ～反例をあげて、命題が常に成り立つとは限らないことを説明する～

前の時間までに、平行四辺形になるための条件について調べてきました。本時は、向かい合う辺に着目して、この他にも平行四辺形になるための条件があるかどうか考えます。

1. 向かい合う辺に着目して、平行四辺形になるための条件を振り返る。

平行四辺形になるための条件

- ① 2組の向かい合う辺がそれぞれが平行である。(定義)
- ② 2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい。
- ③ 2組の向かい合う角がそれぞれ等しい。
- ④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。
- ⑤ 1組の向かい合う辺が平行で、その長さが等しい。



前の時間までに、平行四辺形になるための条件を調べてきました。平行四辺形になるための条件の中で、向かい合う辺に着目したものは何ですか。



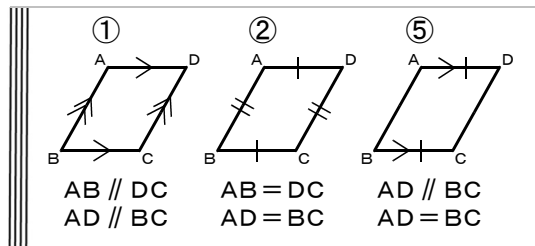
①、②、⑤です。



①、②、⑤について、記号を使って表してみましょう。



①は $AB \parallel DC$ 、 $AD \parallel BC$ 、
 ②は $AB = DC$ 、 $AD = BC$ 、
 ⑤は $AD \parallel BC$ 、 $AD = BC$ です。



①、②、⑤の他に、向かい合う辺に着目した平行四辺形になるための条件は考えられないでしょうか。



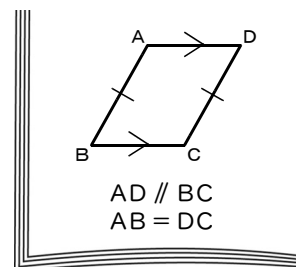
1組の向かい合う辺が平行で、もう1組の向かい合う辺の長さが等しいときは調べていないよ。



四角形ABCDでいうと、ADとBCが平行で、ABとDCの長さを等しくすれば、平行四辺形になるということかな。



この条件でかいてみよう。



2. 見いだした事柄が常に成り立つかどうか図をかいて調べる。

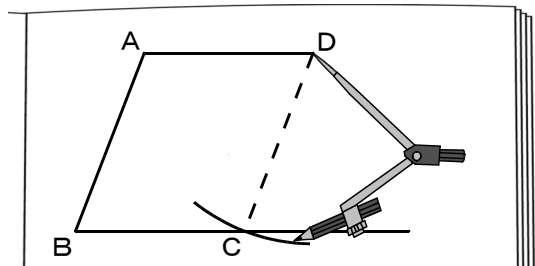


それでは、四角形ABCDで、 $AD \parallel BC$ 、 $AB = DC$ となるように、図をかいてみましょう。平行四辺形はできるでしょうか。

ポイント



平行四辺形がかけました。





平行四辺形にならない四角形もかけました。これは台形かな。



ABの長さと同じ長さを取って、点Dを中心にコンパスでかくと、平行四辺形になるものとならないものができたよ。



平行四辺形がかけたから、「1組の向かい合う辺が平行で、もう1組の向かい合う辺の長さが等しい」は、平行四辺形になるための条件でいいんじゃないかな。



「1組の向かい合う辺が平行で、もう1組の向かい合う辺の長さが等しい四角形ならば、平行四辺形になる。」ということは、いつでも成り立つといってよいですか。



いつでも平行四辺形になるかどうかは、点A、B、Dの位置を変えて他にも平行四辺形ができるかどうか確かめてみる必要があるよ。

幾つか調べただけでは、いつでも成り立つとはいえないから、証明しなければならないんじゃないかな。



でも、いつでも成り立つのかな。この条件でかいたら、平行四辺形にならない四角形もかけたよ。

それって、反例のことだね。



3. 反例の必要性や意味を確認し、事柄が常に成り立つとはいえないことを説明する。



反例とはどういうことでしたか。



仮定を満たしているけれど、結論を満たしていない例です。ここでは、1組の向かい合う辺が平行で、もう1組の向かい合う辺の長さが等しいけれど、平行四辺形にならないという例です。



反例をあげることで、どんなことがいえますか。



反例をただ1つあげることで、事柄がいつでも成り立つとは限らないことを示すことができます。



平行四辺形になるための条件について考えてきました。明らかになったことを、まとめましょう。

ポイント



反例を1つあげることで、「1組の向かい合う辺が平行で、もう1組の向かい合う辺の長さが等しい四角形ならば、平行四辺形になる。」は、平行四辺形になるための条件ではないということが分かりました。

本授業アイデア例 活用のポイント！

- 推測した事柄について考察する場面で、事柄の理解を深めたり反例を見付けたりするために、仮定に当てはまる図をかいたり、具体的な数をあげたりする場面を設定することが大切である。
- 事柄が常に成り立つとは限らないことを説明する場面を設定し、反例の必要性や意味を確認するとともに、反例のよさを実感できるようにすることが大切である。