数学6　構想を立てて説明し、統合的・発展的に考察すること（２つの偶数の和）

6　康太さんは，２つの偶数（ぐうすう）の和がどのような場合に４の倍数になるかを調べています。

$2+2=4$	$4+2=6$	$6+2=8$
$2+4=6$	$4+4=8$	$6+4=10$
$2+6=8$	$4+6=10$	$6+6=12$

　$2+2=4$，$4+4=8$，$6+6=12$のように，同じ２つの偶数の場合，２つの偶数の和が４の倍数になっていることから，康太さんは次のように予想しました。

$4=4\times1$
$8=4\times2$
$12=4\times3$
３つとも４の倍数になっているね。

予想１

同じ２つの偶数の和は，４の倍数になる。

　上の**予想１**がいつでも成り立つことは，次のように説明できます。

説明１

nを整数とすると，偶数は$2n$と表される。
同じ２つの偶数の和は，
　　$2n+2n=4n$
nは整数だから，$4n$は４の倍数である。
したがって，同じ２つの偶数の和は，４の倍数になる。

次の（1）から（3）までの各問いに答えなさい。

（1）前ページの**説明１**では，nを整数として，同じ２つの偶数の和を$2n+2n=4n$と表しています。この式はnの値が９のとき，どのような２つの偶数の和を表していますか。「$8+8=16$」，「$14+14=28$」のように書きなさい。

（2）康太さんは，$2+6=8$のように，同じ２つの偶数の和のほかにも，４の倍数になることがあることから，さらにくわしく調べてみました。

$2+6=8=4\times2$
$6+2=8=4\times2$
$10+14=24=4\times6$
$28+32=60=4\times15$

　そして，次のように予想しました。

予想２

差が４である２つの偶数の和は，４の倍数になる。

２＋６と６＋２は同じとみていいから，
(小さい方の偶数)＋(大きい方の偶数)
について説明すればいいね。

　上の**予想２**がいつでも成り立つことを説明します。下の**説明２**を完成しなさい。

説明２

nを整数とすると，差が４である２つの偶数のうち，
小さい方の偶数は$2n$，大きい方の偶数は$2n+4$と表される。
それらの和は，

$2n+(2n+4)$
$=$

（3）同じ２つの偶数の和や，差が４である２つの偶数の和のほかにも，２つの偶数の和がいつでも４の倍数になることがあります。どのような２つの偶数のとき，その２つの偶数の和が４の倍数になりますか。前ページの**予想２**のように，「〜〜は，……になる。」という形で書きなさい。

出題の趣旨

事象を数学的に考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。
- 事象の特徴を的確に捉えること
- 筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明すること
- 統合的・発展的に考え、事柄の特徴を数学的な表現を用いて説明すること

数に関する事象を考察する場面では、成り立ちそうな事柄を予想し、予想を確かめ、事柄が成り立つ理由について筋道を立てて考え説明すること、さらに、問題の条件を変えるなどして、統合的・発展的に考察することが大切である。

本問では、２つの偶数の和がどのような場合に４の倍数になるかを考察する場面を取り上げた。具体的には、同じ２つの偶数の和が４の倍数になることの説明を振り返り、具体的な数を用いて確かめる状況を設けた。さらに、差が４である２つの偶数の和について予想した事柄が成り立つことを確かめ、文字を用いた式を使って説明する状況を設けた。また、同じ２つの偶数の和や、差が４である２つの偶数の和以外に、どのような２つの偶数の和が４の倍数になるかを見いだし、数学的に表現する文脈を設定した。

6

設問（１）

趣旨

問題場面における考察の対象を明確に捉えることができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　Ａ　数と式

(1)　文字を用いた式について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。

（イ）具体的な事象の中の数量の関係を文字を用いた式で表したり、式の意味を読み取ったりすること。

１．解答類型と反応率

問題番号			解　答　類　型	反応率（%）	正答
6	(1)	1	18＋18＝36　と解答しているもの。	74.0	◎
		2	上記１について、左辺を２×９＋２×９と解答しているもの、又は、右辺を４×９と解答しているもの。	0.4	◎
		3	18＋18　又は　２×９＋２×９　と解答しているもの。	0.1	
		4	36　又は　４×９　と解答しているもの。	0.1	
		5	９＋９＝18　と解答しているもの。	8.1	
		99	上記以外の解答	11.6	
		0	無解答	5.8	
			正答率	74.4	

２．分析結果と課題

○　解答類型５の反応率は 8.1％ である。このように解答した生徒は、$n=9$ のとき ９＋９＝18 になると捉えたと考えられる。

○　解答類型99の中には、「$9n+9n=18n$」という解答がみられた。これは、「$2n+2n=4n$」の左辺に $n=9$ を代入しようとしたが、$9n+9n$ と記述し、その計算をした生徒がいると考えられる。

３．学習指導に当たって

○　予想した事柄が成り立つことの説明を振り返り、文字を用いた式がどのような事柄を表しているかを確認できるようにする

問題場面における考察の対象を明確に捉えることができるようにするために、予想した事柄が成り立つことの説明を振り返り、文字を用いた式と具体的な数を用いた式とを相互に関連付けながら、文字を用いた式がどのような事柄を表しているのかを理解できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、**説明１**を振り返り、文字を用いた式 $2n+2n=4n$ を取り上げ、$n=9$ を代入した式「$2\times9+2\times9=4\times9$」や、「$18+18=36$」と対比させることで、$2n+2n$ が同じ２つの偶数の和を表していることや、$4n$ が４の倍数になることを理解できるようにすることが大切である。

6

設問（２）

趣旨

目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　A　数と式

(1)　文字を用いた式について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（イ）文字を用いた式を具体的な場面で活用すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解　答　類　型	反応率（%）	正答
6	(2)	（正答の条件） ＜４（n＋１）と計算している場合＞ 次の(a)、(b)について記述している。 (a)　n＋１ は整数だから、 (b)　４（n＋１）は４の倍数である。 ＜４n＋４ と計算している場合＞ 次の(c)、(d)について記述している。 (c)　４n、４が４の倍数で、４の倍数の和は４の倍数だから、 (d)　４n＋４ は４の倍数である。 （正答例） ・　４（n＋１） n＋１ は整数だから、４（n＋１）は４の倍数である。 したがって、差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。 （解答類型１） ・　４n＋４ ４n、４が４の倍数で、４の倍数の和は４の倍数だから、４n ＋４ は４の倍数である。 したがって、差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。 （解答類型６）		

		1	4（n＋1）	⒜、⒝について記述しているもの。	20.0	◎
		2		⒜のみを記述しているもの。 （正答例） ・　4（n＋1） 　n＋1 は整数だから。	0.1	○
		3		⒝のみを記述しているもの。 （正答例） ・　4（n＋1） 　よって、4（n＋1）は4の倍数である。	7.6	○
		4		⒜、⒝について記述していないもの。 （正答例） ・　4（n＋1）	1.2	○
		5		⒜、⒝のいずれかの記述に誤りがあるもの。	0.0	
		6	4n＋4	⒞、⒟について記述しているもの。	2.0	◎
		7		⒞のみを記述しているもの。 （正答例） ・　4n＋4 　4n、4が4の倍数だから。	0.1	○
		8		⒟のみを記述しているもの。 （正答例） ・　4n＋4 　よって、4n＋4 は4の倍数である。	18.6	○
		9		⒞、⒟について記述していないもの。	7.6	
		10		⒞、⒟のいずれかの記述に誤りがあるもの。	0.0	
		11	4×□ の□に（n＋1）以外の文字を用いた多項式又は単項式を入れて記述しているもの。		3.9	
		99	上記以外の解答		19.4	
		0	無解答		19.6	
				正答率	49.5	

２．分析結果と課題

○　解答類型99の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　$2n+(2n+4)$
$=2n+6n$
$=8n$

・　$2n+(2n+4)$
$=4n^2+8n$

このように記述した生徒は、差が４である２つの偶数の和を表した式である、$2n+(2n+4)$ を正しく計算することができなかったと考えられる。

○　これまで、本調査においては、下記の表のように、「筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明すること」に関する出題をしてきた（「令和４年度【中学校】解説資料」p.30）。例えば、平成31（令和元）年度【中学校】数学 9 (2)（正答率60.3%）で類題を出題している。「平成31（令和元）年度【中学校】報告書」において、「筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明すること」に課題があると分析している。これに関連して本設問では「差が４である２つの偶数の和が、４の倍数になることの説明を完成すること」をみる問題を出題した（正答率49.5%）。今回の結果から、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明することに、引き続き課題がある。

問題番号	問題の概要	正答率
H19B 2 (2)	連続する５つの自然数の和が５の倍数になることを説明する	42.5%
H22B 2 (2)	連続する３つの奇数の和が３の倍数になることを説明する	26.4%
H24B 2 (1)	連続する３つの自然数の和が３の倍数になることを説明する	38.8%
H27B 2 (2)	連続する３つの整数の和が中央の整数の３倍になることの説明を完成する	44.2%
H31 9 (2)	連続する５つの奇数の和が中央の整数の５倍になることの説明を完成する	60.3%
R４ 6 (2)	差が４である２つの偶数の和が、４の倍数になることの説明を完成する	49.5%

３．学習指導に当たって

○　事柄が成り立つ理由を、構想を立て、根拠を明確にして説明できるようにする

事柄が一般的に成り立つ理由を、構想を立てて説明する場面を設定し、文字式や言葉を用いて根拠を明らかにできるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、予想した事柄である「差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」が成り立つことを説明するために、差が４である２つの偶数の和を表した式を「４×(整数)」の形にすればよいという見通しをもって、式を変形できるようにすることが大切である。その際、$2n+(2n+4)$ の式を計算し、$4n+4$ と表現した状態にとどまっているものを取り上げ、この式を用いて４の倍数になることを示すためには、「４×(整数)」という形の式で表せばよいことを確認し、$4n+4$ を $4(n+1)$ と変形できるようにするなど、説明を洗練させていく活動を取り入れることも大切である。

なお、差が４である２つの偶数について文字を用いて式に表す際には、n を整数としたとき、一方の偶数は $2n$ と表すことができるが、もう一方の偶数はどのように表すことができるかを話し合ったり、説明し合ったりする場面を取り入れることが考えられる。

設問（３）

趣旨

結論が成り立つための前提を考え、新たな事柄を見いだし、説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　Ａ　数と式

(1)　文字を用いた式について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（イ）文字を用いた式を具体的な場面で活用すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型	反応率（%）	正答
6	(3)	（正答の条件） 「○○は、◇◇になる。」という形で、次の(a)、(c)又は(b)、(c)について記述しているもの。 (a)　○○が、「差が４の倍数である２つの偶数の和」である。 (b)　○○が、「差が８である２つの偶数の和」である。 (c)　◇◇が、「４の倍数」である。 （正答例） ・　差が４の倍数である２つの偶数の和は、４の倍数になる。（解答類型１） ・　差が８である２つの偶数の和は、４の倍数になる。（解答類型４） ・　差が 12 である２つの偶数の和は、４の倍数になる。（解答類型７） ・　２つの数がどちらも４の倍数である２つの偶数の和は、４の倍数になる。（解答類型10）		

		1	(a)、(c)について記述しているもの。	2.6	◎
		2	上記１について、(a)についての記述が十分でなく、(c)について記述しているもの。 （正答例） ・　差が４の倍数の和は、４の倍数になる。	0.2	○
		3	(a)のみを記述しているもの。（(a)についての記述が十分でないものを含む。）	0.0	
		4	(b)、(c)について記述しているもの。	26.5	◎
		5	上記４について、(b)についての記述が十分でなく、(c)について記述しているもの。 （正答例） ・　差が８の和は、４の倍数になる。	1.1	○
		6	(b)のみを記述しているもの。（(b)についての記述が十分でないものを含む。）	0.5	
		7	上記４、５について、差が８以外の具体的な４の倍数になる２つの偶数の和について記述しているもの。	1.6	◎
		8	上記７について、差が８以外の具体的な４の倍数になる２つの偶数の和についての記述が十分でなく、(c)について記述しているもの。 （正答例） ・　差が 12 の和は、４の倍数になる。	0.1	○
		9	差が８以外の具体的な４の倍数になる２つの偶数の和のみを記述しているもの。（差が８以外の具体的な４の倍数の和についての記述が十分でないものを含む。）	0.0	
		10	上記１、２、４、５、７、８以外で、和が４の倍数になる２つの偶数について記述し、(c)について記述しているもの。	5.4	◎
		11	上記10について、和が４の倍数になる２つの偶数についての記述が十分でないが、(c)について記述しているもの。 （正答例） ・　４の倍数の和は、４の倍数になる。	0.9	○
		12	上記10、11について、(c)についての記述がないもの。（和が４の倍数になる２つの偶数についての記述が十分でないものを含む。）	0.0	
		99	上記以外の解答	35.4	
		0	無解答	25.8	
			正答率	38.2	

２．分析結果と課題

○　解答類型99の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　差が２である２つの偶数の和は、４の倍数になる。

・　差が10である２つの偶数の和は、４の倍数になる。

このように記述した生徒は、２つの偶数の差に着目したが、４の倍数になるような２つの偶数の差を見いだして説明することができなかったと考えられる。

また、以下のようなものがある。

（例）
・　２つの偶数の和は、４の倍数になる。

・　積が４の倍数である２つの偶数の和は、４の倍数になる。

このように記述した生徒は、どのような２つの偶数の和が４の倍数になるかを求めようとしたが、和が４の倍数になる２つの偶数の特徴について見いだすことができなかったと考えられる。

３．学習指導に当たって

○　結論が成り立つための前提を捉え、見いだした事柄を数学的に表現できるようにする

与えられた事柄や予想した事柄が成り立つかどうかを、具体例をあげて調べる活動を通して、結論が成り立つための前提を捉え、見いだした事柄を数学的に表現できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、「差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」ことから、他にはどのような２つの偶数であれば、その和が４の倍数となるか説明する活動を取り入れることが考えられる。その際、成り立つ事柄を予想するために、具体的な数を用いて和が４の倍数になる２つの偶数について取り上げ、その２つの偶数にどんな特徴があるのかについて話し合う場面を設定することが考えられる。このように、結論が成り立つための前提を捉えることができるようにすることが大切である。

具体的な数を用いて調べる活動（例）

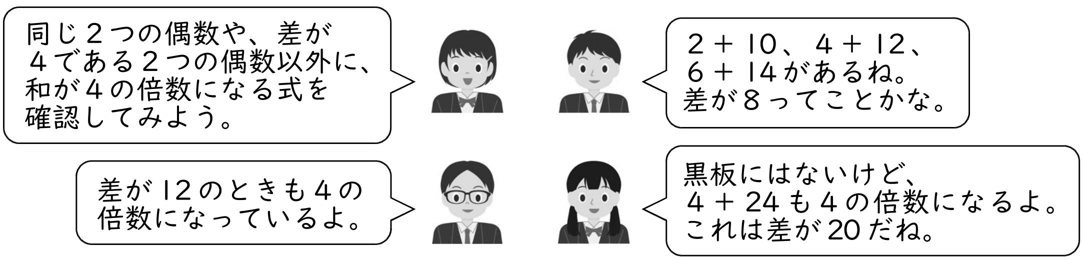
2＋2＝4　4＋4＝8　6＋6＝12 → 同じ２つの偶数の和は、４の倍数になる。
2＋4＝6　4＋6＝10　6＋8＝14
2＋6＝8　4＋8＝12　6＋10＝16 → 差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。
2＋8＝10　4＋10＝14　6＋12＝18
2＋10＝12　4＋12＝16　6＋14＝20
2＋12＝14　4＋14＝18　6＋16＝22
2＋14＝16　4＋16＝20　6＋18＝24
⋮　⋮　⋮

○をつけたものには何か決まりがあるかな？

2＋10＝12
4＋12＝16
6＋14＝20
→ 差が８である２つの偶数？

2＋14＝16 → 差が12である２つの偶数？

差が４の倍数になればよいということ！？



このような活動を通して、結論「４の倍数になる」が成り立つための前提となる２つの偶数を考え、例えば、「差が８である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」や「差が４の倍数である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」などと見いだした事柄を数学的に表現できるようにすることが大切である。

本問全体の学習指導に当たって

○　統合的・発展的に考察することができるようにする

数学の事象から問題を見いだし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って、数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察できるようにすることが大切である。

例えば、「同じ２つの偶数の和は、４の倍数になる。」の前提を変えて、「異なる２つの偶数の和の場合も、４の倍数になるのではないか。」と予想したり、「差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」の前提を変えて、「差が４の倍数である２つの偶数の和は、４の倍数になるのではないか。」と予想したりすることが大切である。こうして得られた予想に対して、具体例をあげて調べたり、既に正しいと認めた文字式を用いた説明を読んで考えたりする場面を設定することが考えられる。具体的には、その説明の中に現れる２つの偶数の和が「$2n+2n=4n$」、「$2n+(2n+4)=4(n+1)$」となることから「$2n+(2n+\triangle)=4(n+\square)$」と変形できればよいという見通しをもち、結論を成り立たせる２つの偶数の条件について考察することが考えられる。このように、結論「４の倍数になる」が成り立つための前提条件を、２つの偶数の和を表す式が「４×(整数)」の形に変形できればよいという見通しをもって調べる活動を取り入れることが考えられる。さらに、最初に考えていた同じ２つの偶数の場合を、差が０である２つの偶数の場合と解釈し直すことも大切である。

このような活動を通して、一旦解決された問題やその解決過程を振り返り、問題の条件や仮定を見直したり、共通する性質を見いだしたりして、統合的・発展的に考察することができるようにすることが大切である。

6

授業アイディア例

２つの偶数の和が４の倍数になる条件を見いだそう
～説明を振り返り、統合的・発展的に考察する～

前の時間では「同じ２つの偶数の和は、４の倍数になる。」ことや「差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」ことを文字式を使って説明しました。この他にも、２つの偶数の和が４の倍数になるときはありますか。

1．差に着目して、２つの偶数の和の持つ性質を調べる。

２＋２＝4	４＋４＝8	６＋６＝12
２＋４＝６	４＋６＝10	６＋８＝14
２＋６＝8	４＋８＝12	６＋10＝16
２＋８＝10	４＋10＝14	６＋12＝18
２＋10＝12	４＋12＝16	６＋14＝20
２＋12＝14	４＋14＝18	６＋16＝22
２＋14＝16	４＋16＝20	６＋18＝24

予想
「差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」

nを整数とすると、差が４である２つの偶数は $2n$、$2n+4$ と表される。
それらの和は、
$2n+(2n+4)$
$=4n+4$
$=4(n+1)$
$n+1$ は整数だから、$4(n+1)$ は４の倍数である。
したがって、差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。

分かったこと
「同じ２つの偶数の和は、４の倍数になる。」
「差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」

「同じ２つの偶数の和や、差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」ということが分かりました。
このほかにも、２つの偶数の和が４の倍数になるときはありますか。

ポイント

差が２や６や10である２つの偶数の和は、４の倍数にはなっていないね。

差が８である２つの偶数の和は、12、16、20で、どれも４の倍数になりそうだよ。

「差が８である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」ということがいえそうですね。「差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」ことの説明を振り返り、どの部分を変えれば、「差が８である２つの偶数の和は、４の倍数になる。」の説明になるといえますか。

ポイント

nを整数とすると、差が８である２つの偶数は $2n$、$2n+8$ と表される。
それらの和は、
$2n+(2n+8)$
$=4n+8$
$=4(n+2)$
$n+2$ は整数だから、$4(n+2)$ は４の倍数である。
したがって、差が８である２つの偶数の和は、４の倍数になる。

差が４の２つの偶数のときには、$2n$、$2n+4$ だったので、差が８の２つの偶数のときには、$2n$、$2n+8$ と変えると、説明ができると思います。

差が４の２つの偶数の和は $4(n+1)$ だったけれど、差が８の２つの偶数の和は $4(n+2)$ になりました。
「$n+1$」が「$n+2$」になりました。

差が８の２つの偶数のときも、差が４のときと同じように、計算すると４×（整数）の形に変形することができるよ。

そうですね。$2n+4$ の４を８に変えることで、２つの偶数の和は $4(n+1)$ の１が２に変わり、差が８である２つの偶数の和は４の倍数になることが説明できましたね。

2．２つの偶数の和が４の倍数になるための、前提となる条件に着目する。

同じ２つの偶数や差が４や８の２つの偶数の和が４の倍数になることが分かりました。このほかにも４の倍数になるときはありそうですか。

２＋14＝16、４＋16＝20となるから、差が12のときも４の倍数になりそうだよ。

差が12の２つの偶数の和が４の倍数になるかどうかは、さっきと同じように説明を書き換えると、$2n+(2n+12)=4(n+3)$ になるね。

$4(n+3)$ において、$n+3$ は整数になるから、$4(n+3)$ は４の倍数になるね。だから、差が12の２つの偶数の和が４の倍数になるといえるよ。

３．「差が4や8、12である2つの偶数」の場合の説明を振り返り、統合的・発展的に考察する。

差が４や８、12の２つの偶数の和は、４の倍数になることが分かりました。これらのことから、何かいえそうなことはありますか。

２つの偶数の差である４、８、12は、４の倍数だね。差が４の倍数である２つの偶数の和は、４の倍数になるといえそうだよ。

差が４の倍数である２つの偶数の和は、文字式を使うとどう表せばいいかな。

２つの偶数の差を△とすると、$2n+(2n+△)$ になるから、
それを計算すると、$4n+△$ になるよ。
この式が ４×(整数) となれば、説明できそうだね。

△に当たるのは、４の倍数だから、mを整数として、$4m$とすればいいんじゃないかな。説明を書いてみよう。

n、mを整数とすると、差が４の倍数である２つの偶数は
$2n$、$2n+4m$ と表される。
それらの和は、

$$
\begin{aligned}
&2n+(2n+4m)\\
&=4n+4m\\
&=4(n+m)
\end{aligned}
$$

$n+m$ は整数だから、$4(n+m)$ は４の倍数である。
したがって、差が４の倍数である２つの偶数の和は、４の倍数になる。

２つの文字を使った説明を基に、これまでの説明を見比べると、どんなことが分かりますか。 ポイント

２つの文字を使った説明は、差が４や８のときだけでなく、差が16や20のときも、２つの偶数の和が４の倍数になることの説明になっていることが分かります。

mが０のとき、$4m$が０になるから、同じ偶数の和の場合もいえるね。

本授業アイディア例　活用のポイント！

- ある事柄が成り立つ場合と成り立たない場合を比較する活動を通して、その結論が成り立つための条件は何かを考え、見いだした性質を基に事柄を説明する場面を設定することが大切である。
- 一旦解決された問題の説明を振り返り、見いだした事柄を拡張して考えることで、統合的・発展的に考察する機会を設けることが大切である。