

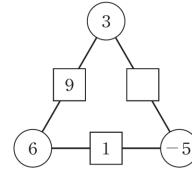
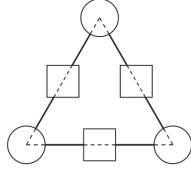
数学 6 構想を立てて説明し、統合的・発展的に考察すること（頂点の数の和）

- 6 次の図1は、正三角形の3つの頂点に○を、3つの辺に□をかいたものです。○には整数を1つずつ入れ、□にはその□がかかっている辺の両端の○に入れた整数の和が入ります。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

- (1) 下の図の□に入る整数を求めなさい。

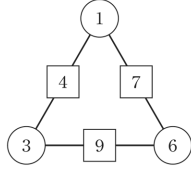
図1



計算の例

3つの○に1、3、6を入れると
3つの□にはそれぞれ
 $1+3$ 、 $3+6$ 、 $6+1$
の計算結果が入る。
だから、3つの□には4、9、7
が入る。

図2



- (2) 次の図は、千夏さんと優真さんが考えてかいたものです。

図3

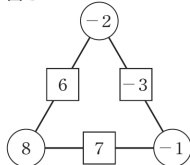
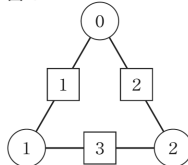


図4



千夏さんは、図2、図3、図4を見ながら、○に入れた整数の和と□に入る整数の和の間に何か関係があるのではないかと考え、次のように調べてみました。

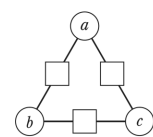
調べたこと

	○に入れた整数の和	□に入る整数の和
図2	$1 + 3 + 6 = 10$	$4 + 9 + 7 = 20$
図3	$(-2) + 8 + (-1) = 5$	$6 + 7 + (-3) = 10$
図4	$0 + 1 + 2 = 3$	$1 + 3 + 2 = 6$

前ページの調べたことから、 $20 = 2 \times 10$ 、 $10 = 2 \times 5$ 、 $6 = 2 \times 3$ のように、「□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の2倍になる」と予想することができます。この予想が成り立つことを説明します。下の説明を完成しなさい。

説明

○に入れた整数を a 、 b 、 c とすると、
3つの□に入る整数は、
 $a+b$ 、 $b+c$ 、 $c+a$ と表される。
それらの和は、



$$(a+b) + (b+c) + (c+a)$$

$$=$$

(3) 優真さんは、正三角形を正四面体に変えても、各頂点の○に入れた整数の和と各辺の□に入る整数の和の間には何か関係があるのではないかと思います。正四面体の図をかいて考えてみることにしました。次の図5は、正四面体の図の各頂点に○を、各辺に□をかいたものです。

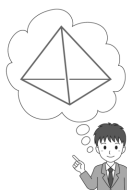
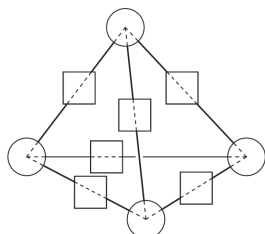


図5



このとき、○に入れた整数の和と□に入る整数の和について、どのようなことが予想できますか。前ページの予想のように、「～は、……になる。」という形で書きなさい。

出題の趣旨

事象を数学的に考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。

- ・事象の特徴を的確に捉えること
- ・筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明すること
- ・統合的・発展的に考え、事柄の特徴を数学的な表現を用いて説明すること

数に関する事象を考察する場面では、成り立ちそうな事柄を予想し、予想を確かめ、事柄が成り立つ理由について筋道を立てて考え説明すること、さらに、問題の条件を変えるなどして、統合的・発展的に考察することが大切である。

本問では、図1の○に入れた整数の和と□に入る整数の和の間にある関係について考察する場面を取り上げた。具体的には、調べたことから○に入れた整数の和と□に入る整数の和の間にある関係について成り立ちそうな事柄を予想し、その事柄が成り立つことを文字を用いた式を使って説明する状況を設けた。さらに、図1の正三角形を正四面体に変えたとき、○に入れた整数の和と□に入る整数の和の間に成り立つ事柄を見だし、数学的な表現を用いて説明する文脈を設定した。

設問(1)

趣旨

問題場面における考察の対象を明確に捉え、正の数と負の数の加法の計算ができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第1学年〕 A 数と式

(1) 正の数と負の数について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(イ) 正の数と負の数の四則計算をすること。

1. 解答類型と反応率

問題番号	解 答 類 型				反応率 (%)	正答
[6]	(1)	1	−2	と解答しているもの。	90.4	◎
		2	2	と解答しているもの。	1.4	
		3	−8	と解答しているもの。	1.7	
		4	8	と解答しているもの。	1.1	
		99	上記以外の解答		2.9	
		0	無解答		2.5	

2. 分析結果と課題

- 正答率は 90.4% であり、問題場面における考察の対象を明確に捉え、正の数と負の数の加法の計算ができている。

3. 学習指導に当たって

- 具体的な数で計算することを通して、与えられた問題場面における考察の対象を捉えることができるようにする

問題場面について、具体的な数を用いて考察の対象を明確に捉えることができるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、与えられた問題場面における考察の対象を正しく捉えるために、3、6、−5のような具体的な整数を正三角形の三つの○に一つずつ入れ、三つの□に入る整数をそれぞれ求める場面を設定することが大切である。

設問(2)

趣旨

目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 A 数と式

(1) 文字を用いた式について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(イ) 文字を用いた式を具体的な場面で活用すること。

1. 解答類型と反応率

問題番号	解 答 類 型	反応率 (%)	正答
[6]	(2) (正答の条件) < $2(a + b + c)$ と計算している場合 > 次の(a)、(b)について記述している。 (a) $a + b + c$ は○に入れた整数の和だから、 (b) $2(a + b + c)$ は○に入れた整数の和の2倍である。 < $2a + 2b + 2c$ と計算している場合 > 次の(c)、(d)、(e)について記述している。 (c) $2a + 2b + 2c$ が $a + b + c$ の2倍になることを示している。 (d) $a + b + c$ は○に入れた整数の和だから、 (e) $2a + 2b + 2c$ は○に入れた整数の和の2倍である。 (正答例) $2(a + b + c)$ $a + b + c$ は○に入れた整数の和だから、$2(a + b + c)$ は○に入れた整数の和の2倍である。 したがって、□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の2倍である。(解答類型1) $2a + 2b + 2c$ $(2a + 2b + 2c) \div 2 = a + b + c$ ここで $a + b + c$ は○に入れた整数の和だから、$2a + 2b + 2c$ は○に入れた整数の和の2倍である。 したがって、□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の2倍である。(解答類型6)		

1	$2(a + b + c)$	(a)、(b)について記述しているもの。	6.4	◎
2		(a)のみを記述しているもの。 (正答例) ・ $2(a + b + c)$ $a + b + c$ は○に入れた整数の和だから。	0.6	○
3		(b)のみを記述しているもの。 (正答例) ・ $2(a + b + c)$ よって、 $2(a + b + c)$ は○に入れた整数の和の2倍である。	20.6	○
4		(a)、(b)について記述していないもの。 (正答例) ・ $2(a + b + c)$	7.7	○
5		(a)、(b)のいずれかの記述に誤りがあるもの。	0.2	
6	$2a + 2b + 2c$	(c)、(d)、(e)について記述しているもの。	0.7	◎
7		(c)と(d)について記述しているもの。 (正答例) ・ $2a + 2b + 2c$ $(2a + 2b + 2c) \div 2 = a + b + c$ $a + b + c$ は○に入れた整数の和だから。	0.1	○
8		(c)と(e)について記述しているもの。 (正答例) ・ $2a + 2b + 2c$ $(2a + 2b + 2c) \div 2 = a + b + c$ よって、 $2a + 2b + 2c$ は○に入れた整数の和の2倍である。	0.6	○
9		(c)のみを記述しているもの。 (正答例) ・ $2a + 2b + 2c$ $(2a + 2b + 2c) \div 2 = a + b + c$	0.1	○
10		次のいずれかの場合に当てはまるもの。 ・ (d)と(e)について記述しているもの。 ・ (d)のみを記述しているもの。 ・ (e)のみを記述しているもの。	7.6	
11		(c)、(d)、(e)を記述していないもの。	6.1	
12		(c)、(d)、(e)のいずれかの記述に誤りがあるもの。	0.2	
99	上記以外の解答		26.3	
0	無解答		23.0	
正答率			36.7	

2. 分析結果と課題

- 解答類型99の具体的な例としては、以下のようなものがある。

(例)

$$\begin{aligned} & \cdot (a+b) + (b+c) + (c+a) \\ & = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (a+b) + (b+c) + (c+a) \\ & = ab + bc + ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (a+b) + (b+c) + (c+a) \\ & = (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

このように記述した生徒は、「 $a+a$ 」を「 a^2 」や「 $a+b$ 」を「 ab 」と計算したり、「 $2(a+b+c)$ 」を「 $(a+b+c)^2$ 」と表したりしたと考えられる。

- これまで、本調査においては、下記の表のように、「筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明すること」に関する出題をしてきた（「令和6年度【中学校】解説資料」p.29）。例えば、令和5年度【中学校】数学[6](2)で類題を出題している（正答率59.5%）。「令和5年度【中学校】報告書」において、「目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明すること」に課題があると分析している。これに関連して本設問では、「正三角形の各頂点に○を、各辺に□をかいた図において、□に入る整数の和が○に入れた整数の和の2倍になることの説明を完成する」問題を出題した（正答率36.7%）。今回の結果から、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明することに、引き続き課題があると考えられる。

問題番号	問題の概要	正答率
H23B [2](3)	連続する五つの自然数の和が中央の自然数の5倍になることを説明する	実施せず
H27B 2	連続する三つの整数の和が中央の整数の3倍になることの説明を完成する	44.2%
H30B 2	はじめの数としてどんな整数を入れて計算しても、計算結果はいつでも4の倍数になる説明を完成する	38.6%
H31 [9](2)	連続する五つの奇数の和が中央の奇数の5倍になることの説明を完成する	60.3%
R3 [6](2)	四角で四つの数を囲むとき、四つの数の和はいつでも4の倍数になることの説明を完成する	62.3%
R5 [6](2)	はじめの数にかける数が2、たす数が6ならば、計算結果はいつでも3の倍数になることの説明を完成する	59.5%
R6 [6](2)	正三角形の各頂点に○を、各辺に□をかいた図において、□に入る整数の和が○に入れた整数の和の2倍になることの説明を完成する	36.7%

3. 学習指導に当たって

○ 事柄が成り立つ理由を、根拠を明確にして説明できるようにする

事柄が一般的に成り立つ理由を、文字式や言葉を用いて根拠を明らかにして説明できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、「□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の2倍になる」ことを説明するために、□に入る整数の和を表した式を $2 \times (\text{○に入れた整数の和})$ の形にすればよいという見通しをもち、それに沿って式を変形する場面を設定することが大切である。その際、 $a + b + c$ は○に入れた整数の和であることを根拠として示すことができていないものや、 $(a + b) + (b + c) + (c + a) = 2a + 2b + 2c$ と表現した状態にとどまっているものなどを取り上げ、説明を洗練させていく活動を取り入れることが考えられる。

設問(3)

趣旨

統合的・発展的に考え、成り立つ事柄を見だし、数学的な表現を用いて説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 A 数と式

(1) 文字を用いた式について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(イ) 文字を用いた式を具体的な場面で活用すること。

1. 解答類型と反応率

問題番号	解答類型	反応率 (%)	正答
6	(3) (正答の条件) 「●●は、◆◆になる。」という形で、次の(a)、(b)について記述しているもの。 (a) ●●が、「□に入る整数の和」である。 (b) ◆◆が、「○に入れた整数の和の3倍」である。 ~~~~~ (正答例) ・ □に入る整数の和は、○に入れた整数の和の3倍になる。 (解答類型1) ・ ○に入れた整数の和は、□に入る整数の和の $\frac{1}{3}$ 倍になる。 (解答類型3)		
	1 (a)、(b)について記述しているもの。	40.9	◎
	2 上記1について、(a)又は(b)についての記述が十分でないもの。 (正答例) ・ □の和は、○の和の3倍になる。	1.1	○
	3 (a)について、「●●」に「○に入れた整数の和」と記述し、(b)について、「◆◆」に「□に入る整数の和の $\frac{1}{3}$ 倍」と記述しているもの。	0.1	◎
	4 上記3について、「●●」又は「◆◆」についての記述が十分でないもの。 (正答例) ・ ○の和は、□の和の $\frac{1}{3}$ 倍になる。	0.0	○
	5 上記1、3について、「●●」について記述していないもの。	0.5	
	6 上記1、3以外で、「○に入れた整数の和」と「□に入る整数の和」について、「●●は、◆◆になる。」という形で、成り立つ事柄について記述しているもの。	0.3	◎
	7 上記6について、「●●」又は「◆◆」についての記述が十分でないもの。	0.1	○
	8 「○に入れた整数の和」と「□に入る整数の和」について、「●●は、◆◆になる。」という形で、成り立たない事柄について記述しているもの。	9.2	
	9 「●●は、◆◆になる。」という形で、「○に入れた整数の和」又は「□に入る整数の和」について記述しているが、「○に入れた整数の和」と「□に入る整数の和」の関係について記述していないもの。(「○に入れた整数の和」又は「□に入る整数の和」についての記述が十分でないものを含む。)	5.6	
	99 上記以外の解答	13.1	
	0 無解答	29.1	
	正答率	42.5	

2. 分析結果と課題

- 正答率は 42.5% であり、統合的・発展的に考え、成り立つ事柄を見いだし、数学的な表現を用いて説明することに課題がある。

- 解答類型 8 の具体的な例としては、以下のようなものがある。

(例)

- ・ □に入る整数の和は、○に入れた整数の和の 4 倍になる。
- ・ □に入る整数の和は、○に入れた整数の和の $\frac{3}{2}$ 倍になる。

このように記述した生徒は、「○に入れた整数の和」と「□に入る整数の和」の関係に着目することはできているが、「3 倍になる」ことを捉えることができなかったと考えられる。

- 解答類型 99 の具体的な例としては、以下のようなものがある。

(例)

- ・ □は、○の 3 倍になる。

このように記述した生徒は、「○に入れた整数の和」と「□に入る整数の和」を用いて成り立つ事柄を記述することができなかったと考えられる。

3. 学習指導に当たって

- 問題の条件を変えて考え、成り立つ事柄を見いだし数学的に表現できるようにする
問題の条件を変えて見いだした事柄について、数学的に表現できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、正三角形の場合において「□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の 2 倍になる」ことを考察した過程や結果を基にして、正三角形を正四面体に変えた場合に成り立つ事柄を説明する活動を取り入れることが考えられる。その際、結論に含まれる「2 倍」がどのように変わるかを、具体的な整数で計算して予想する活動や、文字を用いて明らかにする場面を設定することが考えられる。その上で、見いだした事柄を「□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の 3 倍になる」のように「●●は、◆◆になる。」という形で表現できるように指導することが大切である。

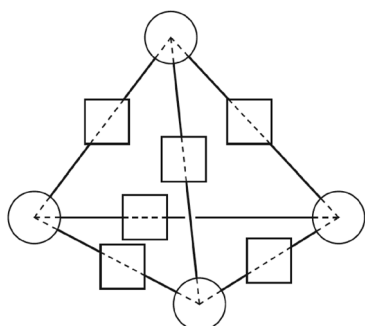
本問全体の学習指導に当たって

○ 問題解決の過程や結果を振り返り、統合的・発展的に考察できるようにする

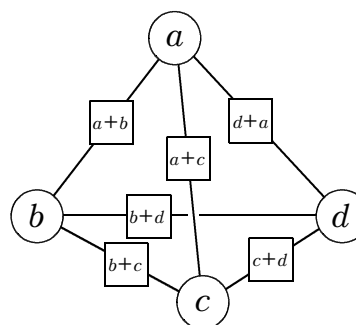
数学の事象から問題を見だし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って数量や図形などの性質を見だし、統合的・発展的に考察できるようにすることが大切である。

正三角形を正方形や正四面体など他の図形に変えた場合において、○に入れた整数の和と□に入る整数の和の間にどのような関係があるかについて考察する場面を設定することが考えられる。その際、○に具体的な数を入れて成り立つ性質を予想したり、正三角形の場合に文字を用いて説明したことを基に考えたりするように促すことが考えられる。例えば、図Ⅰを用いて、○に具体的な整数を入れて幾つかの場合を調べ、「○に入れた整数の和の3倍になりそうだ。」と予想したり、図Ⅱのように、文字を用いて成り立つ事柄を明らかにしたりする活動を取り入れることが考えられる。

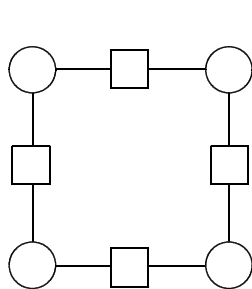
図Ⅰ



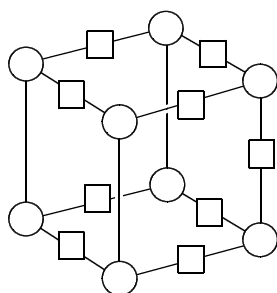
図Ⅱ



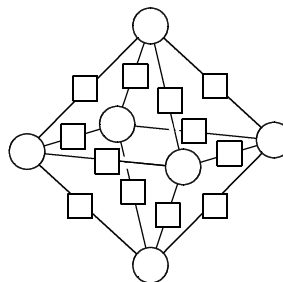
さらに、いろいろな図形に変えて調べた結果を基に、□に入る整数の和が、○に入れた整数の和の2倍や3倍などの整数倍になる場合や、整数倍にならない場合について、共通点や相違点を見いだすなど、統合的・発展的に考えるよう促す場面を設定することも考えられる。



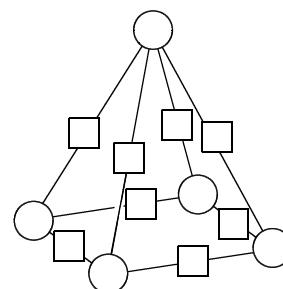
正方形



立方体



正八面体



四角錐

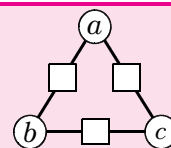
なお、頂点から出ている辺の数に着目すると、○に入れた整数の和と□に入る整数の和の関係について、次のようにまとめられる。

正方形、立方体や正八面体など、各頂点から出ている辺の数がすべて n である図形については、○にどんな整数を入れても「□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の n 倍になる」ことが成り立つ。四角錐などのように、こうした性質が成り立たない図形もある。

「○に入れた整数の和と□に入る整数の和の関係について考えよう」

～問題解決の過程を振り返り、統合的・発展的に考察する～

前の時間では、正三角形の図において、○に具体的な整数を入れて計算することを通して「□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の2倍になる」ことを予想し、文字式を使って説明しました。



1. 正三角形を他の図形に変えた場合について考察する。



教師

前は、正三角形の図において「□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の2倍になる」ことが分かりましたね。正三角形を他の図形に変えるとどうなるでしょうか。どんな図形について考えてみたいですか。



正方形や正五角形だとうだろう。



空間図形では考えられないかな。



正四面体や四角錐ではどうかな。

平面図形

正方形 →
正五角形 →
正六角形 →

空間図形

正四面体 →
立方体 →
正八面体 →
五角柱 →
四角錐 →



いろいろな図形が出てきましたね。各頂点の○に入れた整数の和と各辺の□に入る整数の和の間には、どのような関係があるのでしょうか。自分で調べたいと思う図形を選んで考えてみましょう。

ポイント

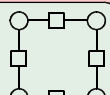
自分が選んだ図形についてそれぞれで考察している場面



正方形について考えてみたいけどどうすればいいのかな。



まずは図をかくて、○に具体的な整数を入れて□に入る整数を計算してみましょう。



正方形に具体的な整数を入れてみたら、□に入る整数の和は○に入れた整数の和の2倍になったよ。



どの図形でも2倍になるかな。



正方形や正五角形も調べて、どちらも2倍になることを、文字を用いて説明できました。



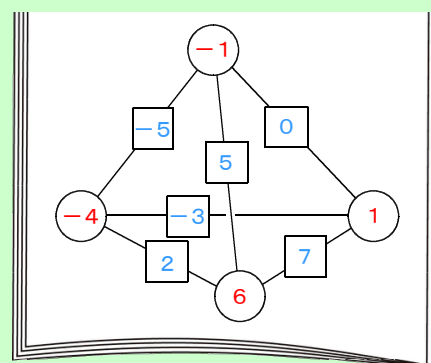
正六角形でも同じことがいえそうですか。空間図形でも同じように2倍になりそうですか。



正四面体だとうなるかな。



具体的な数を入れて調べてみたら3倍になったよ。



いつでも3倍になるか、文字を使って考えてみよう。

2. ○に入れた整数の和と□に入る整数の和の関係を明らかにする。



自分が選んだ図形について、○に入れた整数の和と□に入る整数の和との関係を見付けることができましたね。では、皆さんのノートをモニターに映して共有しましょう。

ポイント

正方形の場合
○に入れた整数の和
 $a+b+c+d$
□に入る整数の和
 $2a+2b+2c+2d$
 $=2(a+b+c+d)$
□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の2倍である。

四角錐の場合
○に入れた整数の和
 $a+b+c+d+e$
□に入る整数の和
 $4a+3b+3c+3d+3e$
うまくいかない！

正四面体の場合
○に入れた整数の和
 $a+b+c+d$
□に入る整数の和
 $3a+3b+3c+3d$
 $=3(a+b+c+d)$
□に入る整数の和は、○に入れた整数の和の3倍である。



四角錐の場合の「うまくいかない！」とはどういうことですか。

文字式を(整数)×(○に入れた整数の和)の形に変形できないということです。



3. 見付けた関係を整理し、統合的・発展的に考察する。

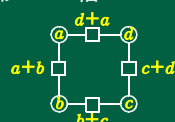


見付けた関係をまとめてみましょう。調べたことから分かることや何か気付くことなどはありますか。

ポイント

平面図形

正方形 → 2倍
正五角形 → 2倍
正六角形 → 2倍



空間図形

正四面体 → 3倍
立方体 → 3倍
正八面体 → 4倍
五角柱 → 3倍
四角錐 → ×



調べた正多角形だとすべて2倍になっているけど、正多角形ならいつでも2倍になるといえるかな。

どんな正多角形でも、□の中に○に入れた整数が2回ずつ入るから、いつでも2倍になることがいえるよ。



空間図形は、3倍だったり、4倍だったり、うまくいかない場合もあるね。3倍になるときに4倍になるときの違いは何か。

○から出ている辺の数と何倍になるかが関係していそうだな。



4. 問題解決の過程を振り返る。



○から出ている辺の数と何倍になるかの関係などについて、調べてみたら面白そうですね。では、今日の授業で分かったことや大切だと思った考え方、もっと知りたいことなどをノートに書いてみましょう。

振り返り

正三角形を他の正多角形や空間図形に変えても、文字で表すことで、○に入れた整数の和と□に入る整数の和との関係を同じように説明できることが分かった。

振り返り

正多角形はいつでも2倍だけど、空間図形はいろいろな場合があった。○から出ている辺の数と何倍になるかが関係していそうだから、さらに調べてみたい。

本授業アイデア例 活用のポイント！

- 自分の考察したい対象を選択するなど、生徒それぞれの興味・関心に応じて考察する機会を設けることが大切である。
- 問題の条件を変えて、文字式を用いて簡潔かつ明瞭に表現することによって、事象の仕組みを的確に捉えられるようにすることが大切である。
- 解決の過程や結果を振り返って、数量や図形などの性質を見だし統合的・発展的に考察できるようにすることが大切である。